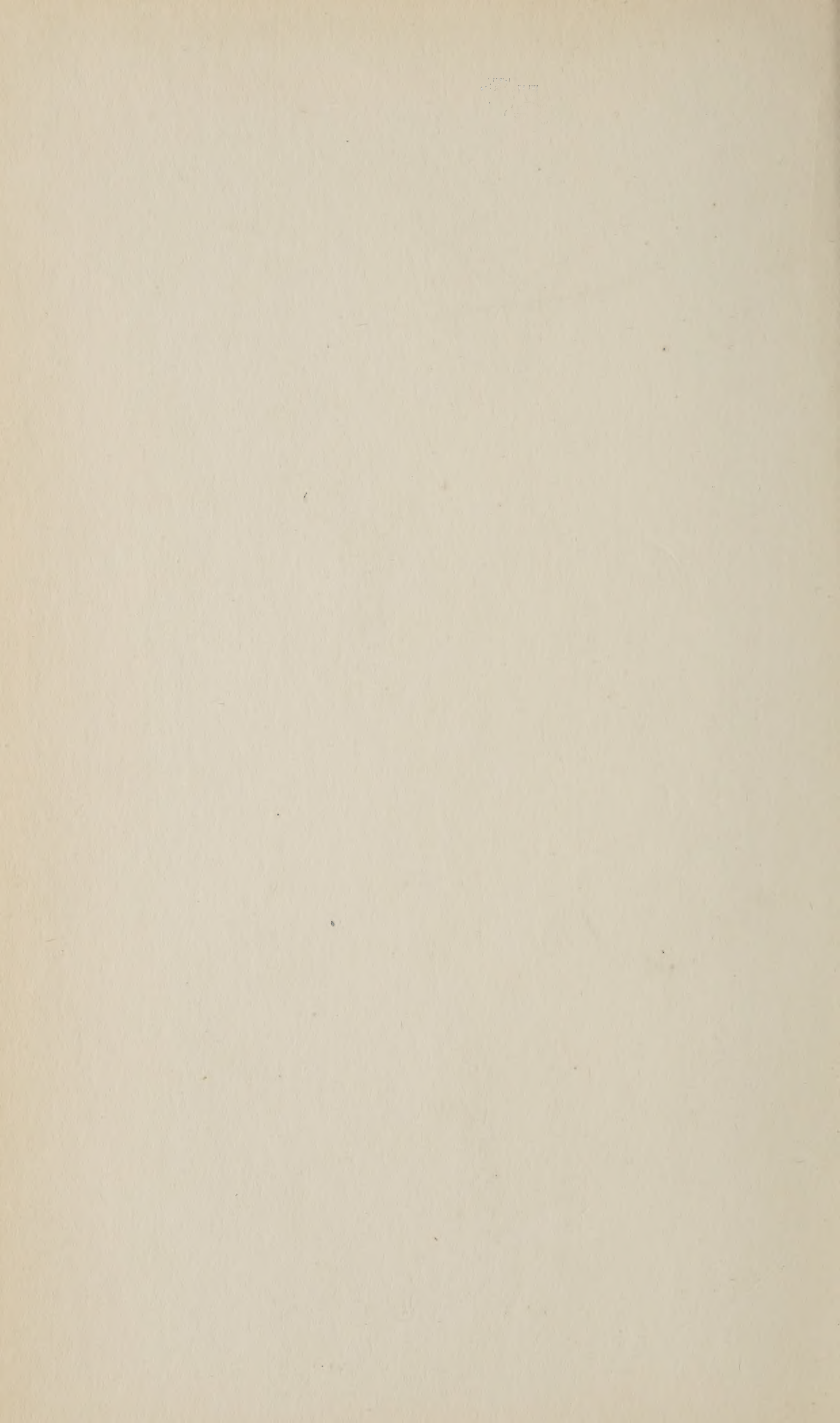




NOUVELLES ANNALES

DE

MATHÉMATIQUES.


ΑΕΙ Ο ΘΕΟΣ ΓΕΩΜΕΤΡΕΙ

NOUVELLES ANNALES

DE

MATHÉMATIQUES

JOURNAL DES CANDIDATS

AUX ÉCOLES SPÉCIALES, A LA LICENCE ET A L'AGRÉGATION,

DIRIGÉ PAR

C.-A. LAISANT,
Docteur ès Sciences,
Ancien examinateur d'admission
à l'École Polytechnique.

R. BRICARD,
Ingénieur des Manufactures de l'État,
Professeur au Conservatoire des Arts et Métiers,
Répétiteur à l'École Polytechnique.

PUBLICATION FONDÉE EN 1842 PAR GERONO ET TERQUEM,
ET CONTINUÉE PAR PROUHET, BOURGET, BRISSE, ROUCHÉ, ANTOMARI,
DUPORCQ ET BOURLET.

QUATRIÈME SÉRIE.

TOME XVI.

(LXXVe VOLUME DE LA COLLECTION.)

PARIS,
GAUTHIER-VILLARS ET Cie, ÉDITEURS,
LIBRAIRES DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,
Quai des Grands-Augustins, 55.

1916

NOUVELLES ANNALES

DE

MATHÉMATIQUES.

[K¹6b][K¹11]

SUR LES FAMILLES DE CERCLES;

PAR M. R. GOORMAGHTIGH.

I. — GÉNÉRALITÉS.

1. Considérons une famille de cercles π dépendant d'un paramètre; le lieu de leurs centres P est une courbe Γ et leur rayon R est une fonction de l'arc s de cette courbe. En vue d'employer les méthodes de la Géométrie intrinsèque, prenons pour axes mobiles des x et des y la tangente et la normale en P à la courbe Γ (*fig.* 1). D'une manière générale, les coordonnées des points où la courbe

$$f(x, y, s) = 0$$

touche son enveloppe s'obtiennent [1] en résolvant le système formé par cette équation et

$$(1) \qquad (y - \rho)\frac{\partial f}{\partial x} - x\frac{\partial f}{\partial y} + \rho\frac{\partial f}{\partial s} = 0,$$

où ρ désigne le rayon de courbure de Γ en P.

Or, l'équation du cercle π est

$$f(x, y, s) \equiv x^2 + y^2 - R^2 = 0.$$

---

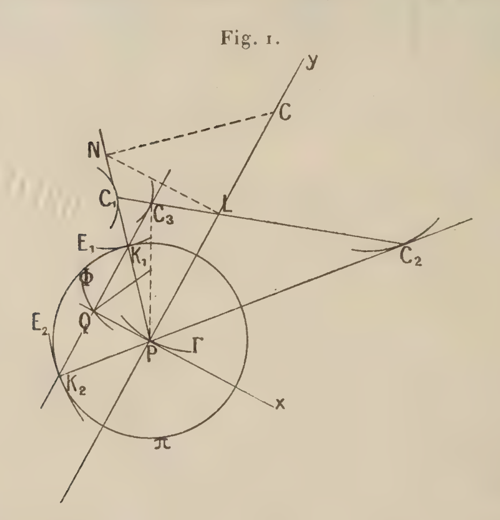
[1] CESÁRO, *Natürliche Geometrie*, p. 24.

Pour ce cercle, l'équation (1) devient

$$x = -R\frac{dR}{ds}.$$

Par suite, si l'on désigne l'angle K_1Px par θ, les

Fig. 1.



coordonnées des points K_1 et K_2 où π touche son enveloppe s'écrivent

$$x = R\cos\theta, \qquad y = \pm R\sin\theta,$$

et l'on a

$$\cos\theta = -\frac{dR}{ds}. \tag{2}$$

L'angle θ sera obtus quand R croît en même temps que s, aigu dans le cas contraire.

Les points où un cercle π *de centre* P *touche son enveloppe sont symétriques par rapport à la tangente en* P *au lieu des centres des cercles considérés* [1].

---

[1] Ce résultat et la relation (2) s'établissent aisément au moyen d'une considération de limites.

2. L'enveloppe se compose de deux branches E_1 et E_2 qui sont les lieux des points K_1 et K_2. Cherchons les coordonnées (x_1, y_1), (x_2, y_2) des centres de courbure C_1, C_2 de E_1, E_2 respectivement en K_1 et K_2. La droite PK_1 a pour équation

$$(3) \qquad y - x \operatorname{tang}\theta = 0.$$

Pour trouver les coordonnées du point C_1 où cette droite touche son enveloppe, il suffit de résoudre le système formé par (3) et l'équation

$$(y-\rho)\operatorname{tang}\theta + x + \frac{\rho x}{\cos^2\theta}\frac{d\theta}{ds} = 0,$$

obtenue en dérivant (3) sous la forme (1). On trouve ainsi

$$(4) \qquad x_1 = \frac{\sin\theta\cos\theta}{\frac{1}{\rho}+\frac{d\theta}{ds}}, \qquad y_1 = \frac{\sin^2\theta}{\frac{1}{\rho}+\frac{d\theta}{ds}}.$$

De même, on obtient

$$(5) \qquad x_2 = -\frac{\sin\theta\cos\theta}{\frac{1}{\rho}-\frac{d\theta}{ds}}, \qquad y_2 = \frac{\sin^2\theta}{\frac{1}{\rho}-\frac{d\theta}{ds}}.$$

On en déduit

$$(6) \qquad PC_1 = \left|\frac{\sin\theta}{\frac{1}{\rho}+\frac{d\theta}{ds}}\right|, \qquad PC_2 = \left|\frac{\sin\theta}{\frac{1}{\rho}-\frac{d\theta}{ds}}\right|,$$

et

$$\sin\theta\left(\frac{\varepsilon_1}{PC_1}+\frac{\varepsilon_2}{PC_2}\right) = \frac{2}{\rho},$$

où $\varepsilon_1 = \pm 1$, $\varepsilon_2 = \pm 1$ suivant les cas. Ceci exprime [1] que la courbe Γ a en P même centre de courbure que la conique qui touche Γ en ce point et a C_1 et C_2 pour foyers.

[1] Cesáro, *Natürliche Geometrie*, p. 47.

Les centres de courbure des deux branches de l'enveloppe du cercle π sont les foyers d'une conique ayant en P avec Γ un contact du deuxième ordre.

On peut énoncer ce théorème sous la forme suivante, utile pour certaines constructions :

Si l'on projette le centre de courbure C de Γ sur PC_1, puis le point obtenu sur PC, cette dernière projection appartient à la droite C_1C_2.

3. Des expressions (4) et (5) on déduit le coefficient angulaire de la droite C_1C_2

$$\frac{\dfrac{1}{\dfrac{1}{\rho}+\dfrac{d\theta}{ds}} - \dfrac{1}{\dfrac{1}{\rho}-\dfrac{d\theta}{ds}}}{\dfrac{1}{\dfrac{1}{\rho}+\dfrac{d\theta}{ds}} + \dfrac{1}{\dfrac{1}{\rho}-\dfrac{d\theta}{ds}}}\operatorname{tang}\theta = -\rho\operatorname{tang}\theta\frac{d\theta}{ds}.$$

Cette droite a donc pour équation

$$y - \frac{\sin^2\theta}{\dfrac{1}{\rho}+\dfrac{d\theta}{ds}} = -\rho\operatorname{tang}\theta\frac{d\theta}{ds}\left(x - \frac{\sin\theta\cos\theta}{\dfrac{1}{\rho}+\dfrac{d\theta}{ds}}\right)$$

ou, plus simplement,

$$(7)\qquad y = \rho\sin\theta\left(\sin\theta - \frac{x}{\cos\theta}\frac{d\theta}{ds}\right).$$

Elle coupe la droite K_1K_2, d'équation

$$(8)\qquad x - R\cos\theta = 0,$$

en un point d'ordonnée

$$(9)\qquad \rho\sin\theta\left(\sin\theta - R\frac{d\theta}{ds}\right).$$

Cherchons, d'autre part, l'ordonnée du point $\mathbf{C}_3$ où la droite K_1K_2 touche son enveloppe. Résolvons donc

le système d'équations formé par (8) et l'équation

$$(10)\qquad y - \rho - \rho\cos\theta\frac{dR}{ds} + \rho R\sin\theta\frac{d\theta}{ds} = 0,$$

obtenue en dérivant (8) sous la forme (1). En tenant compte de (2), l'équation (10) s'écrit

$$(11)\qquad y - \rho\sin^2\theta + \rho R\sin\theta\frac{d\theta}{ds} = 0.$$

De (8) et (11) on déduit pour l'ordonnée de C_3

$$\rho\sin\theta\left(\sin\theta - R\frac{d\theta}{ds}\right),$$

valeur identique à (9). On a donc ce théorème :

Les centres de courbure de l'enveloppe en ses points de contact avec un cercle π sont en ligne droite avec le point où la corde de contact de cette enveloppe avec ce cercle touche son enveloppe.

Ce théorème donne lieu à des conséquences intéressantes dont quelques-unes sont des propositions connues [1]. Il peut être considéré comme la généralisation d'une propriété des centres de courbure aux points correspondants de deux courbes inverses.

Si l'on applique le théorème de Menelaüs au triangle C_1PC_2 coupé par la transversale $K_1K_2C_3$, on voit que le point C_3 divise C_1C_2 dans le rapport de K_1C_1 à K_2C_2. On peut donc énoncer la propriété qui précède de la manière suivante :

Le point où la droite K_1K_2 touche son enveloppe divise la droite qui joint les centres de courbure des enveloppes E_1 et E_2 en K_1 et K_2 dans le rapport des rayons de courbure correspondants.

---

(1) *Voir* paragraphes 5, 14, 16, 20, 22.

4. *Courbes équidistantes.* — On sait que Γ est la courbe équidistante (¹) de E_1 et E_2. Les développements qui précèdent donnent la construction de la tangente et du centre de courbure au point P de cette courbe. Si l'on mène de P les normales égales PK_1 et PK_2 aux courbes E_1 et E_2, la tangente Px en P à Γ est la bissectrice de l'angle K_1PK_2. Le centre de courbure s'obtient par la construction suivante :

La droite qui joint les centres de courbure C_1, C_2 *des courbes* E_1, E_2 *en* K_1, K_2 *rencontre la normale à la courbe équidistante en* L. *La perpendiculaire en* L *à* PL *rencontre* PC_1 *en* N, *celle en* N *sur* PC_1 *coupe* PL *au centre de courbure cherché.*

5. *Fibre moyenne* (²). — On considère les cordes K_1K_2 également inclinées sur deux courbes E_1, E_2, telles que les tangentes en K_1 et K_2 à ces courbes forment avec K_1K_2 un triangle isoscèle.

Le paragraphe 3 donne la construction du point où une telle corde K_1K_2 touche son enveloppe :

Le point où K_1K_2 *touche son enveloppe est son point d'intersection avec la droite qui joint les centres de courbure des courbes* E_1, E_2 *en* K_1 *et* K_2.

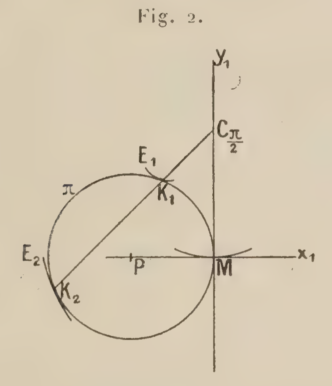
Le lieu Φ du milieu Q de K_1K_2 est, d'après la dénomination de M. d'Ocagne (³), la fibre moyenne des courbes E_1, E_2; ce lieu est la courbe orthoptique de Γ et du lieu de C_3. On déduit donc des résultats qui précèdent cette construction de la normale au point Q de la fibre moyenne :

(¹) LORIA-SCHÜTTE, *Spezielle ebene Kurven*, t. II, p. 356.
(²) LORIA-SCHÜTTE, *Ibid.*, p. 357.
(³) *Cours de Géométrie descriptive*, Paris, 1896, p. 275.

La droite $K_1 K_2$ *rencontre en* C_3 *la droite qui joint les centres de courbure en* K_1 *et* K_2 *des courbes données* E_1 *et* E_2; *les normales à ces courbes en ces points se rencontrent en* P; *la droite qui joint* Q *au milieu de* PC_3 *est la normale cherchée.*

6. *Trajectoires orthogonales.* — Au lieu de rapporter le cercle π à la tangente et la normale de Γ en P, considérons un point M où le cercle rencontre une trajectoire orthogonale et prenons pour axes mobiles la tangente et la normale Mx_1, My_1 à cette trajectoire en

Fig. 2.



ce point (*fig.* 2). Soient s_1, ρ_1, $C_{\frac{\pi}{2}}$ l'arc, le rayon et le centre de courbure de cette trajectoire en M. Si l'on dérive l'équation

$$x^2 + y^2 + 2\mu x = 0$$

du cercle π, sous la forme

$$(y - \rho_1)\frac{\partial f}{\partial x} - x\frac{\partial f}{\partial y} + \rho_1\frac{\partial f}{\partial s_1} = 0,$$

on obtient pour l'équation de la corde de contact du

cercle π avec son enveloppe

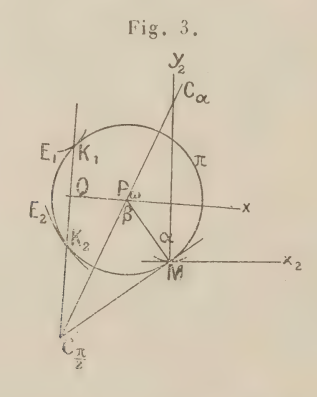
$$\rho_1 x\left(\frac{d\mu}{ds_1} - 1\right) + \mu y - \mu\rho_1 = 0.$$

Cette droite contient le centre de courbure $C_{\frac{\pi}{2}}$ de la trajectoire orthogonale en M. On retrouve donc cette propriété connue :

La corde de contact d'un cercle π avec son enveloppe est le lieu des centres de courbure des trajectoires orthogonales de la famille de cercles aux points où elles coupent le cercle π.

7. *Trajectoires d'angle α.* — Plus généralement, rapportons le cercle π à la tangente et la normale au point M où ce cercle rencontre une trajectoire d'angle α (*fig.* 3). Soient s_2, ρ_2, C_α l'arc, le rayon et le centre

Fig. 3.



de courbure de cette trajectoire en M. L'équation du cercle étant

$$x^2 + y^2 + 2R(x \sin\alpha - y \cos\alpha) = 0,$$

celle de la corde de contact du cercle avec son enve-

loppe sera

$$(y-\rho_2)(x+R\sin\alpha) \\ -x(y-R\cos\alpha)+(x\sin\alpha-y\cos\alpha)\frac{dR}{ds_2}=0.$$

Cette corde coupe la tangente

$$y-x\tang\alpha=0$$

en M à π sur la droite

$$x(\rho_2-R\cos\alpha)-Ry\sin\alpha+\rho_2R\sin\alpha=0;$$

c'est la droite PC_α (¹). L'intersection de la tangente à π en M avec la corde de contact de π avec son enveloppe est le centre de courbure de la trajectoire orthogonale au point M. On a donc cette construction du centre de courbure de la trajectoire d'angle α en M :

La tangente en M *à* π *rencontre la corde de contact de ce cercle avec son enveloppe en* $C_{\frac{\pi}{2}}$; *le centre de courbure* C_α *est à l'intersection de* $PC_{\frac{\pi}{2}}$ *et de la normale en* M *à la trajectoire considérée.*

Prenons maintenant pour axe polaire la tangente Px en P à la courbe Γ; désignons par a la distance PQ, par l le rayon vecteur PC_α, par ω l'angle de PC_α avec Px, par β l'angle $C_{\frac{\pi}{2}}PM$. Nous avons alors

$$PC_{\frac{\pi}{2}}=\frac{a}{\cos\omega}, \qquad \cos\beta=\frac{R\cos\omega}{a},$$

(¹) Si l'on considère, pour une famille de courbes quelconques, les trajectoires qui passent par un point donné et qui correspondent à différentes valeurs de α, le lieu des centres de courbure de ces trajectoires en ce point est une droite (*voir* CESÁRO, *Natürliche Geometrie*, p. 148).

d'où l'on déduit, en considérant le triangle PMC_α,

$$l = \frac{R\sin\alpha}{\sin(\beta-\alpha)} = \frac{R\sin\alpha}{\sin\beta\cos\alpha - \cos\beta\sin\alpha}$$
$$= \frac{aR\sin\alpha}{\cos\alpha\sqrt{a^2 - R^2\cos^2\omega} - R\sin\alpha\cos\omega}.$$

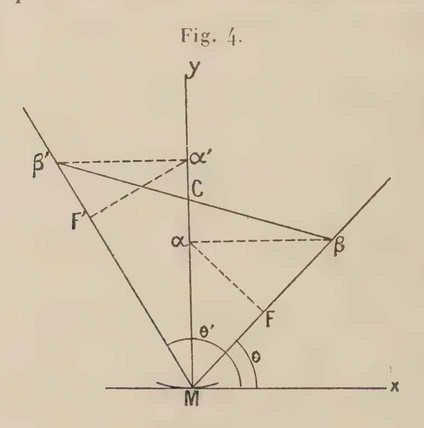
Lorsque le point M se déplace sur le cercle π, l'angle α restant constant, le lieu de C_α est donc une conique. On a donc le théorème suivant :

Les centres de courbure des trajectoires d'angle α d'une famille de cercles aux points où elles rencontrent l'un des cercles appartiennent à une même conique.

II. — Cercles dilatés ou contractés.

8. *Centre de courbure de l'ovale de Descartes.* — Soit M un point de l'ovale de Descartes définie par les

Fig. 4.



foyers F et F' et les constantes λ et λ'. En désignant FM et F'M (*fig.* 4) par r et r', on a donc

$$\lambda r + \lambda r' = a,$$

d'où, par dérivation,

$$\lambda \frac{dr}{ds} + \lambda' \frac{dr'}{ds} = 0,$$

ou, eu égard aux formules de Cesáro qui servent à exprimer que les points F et F' sont immobiles ([1]),

$$(12) \qquad \lambda \cos\theta + \lambda' \cos\theta' = 0,$$

θ et θ' désignant les angles de MF et MF' avec la tangente Mx en M à l'ovale. Par suite, la normale s'obtient en composant deux vecteurs proportionnels à λ et λ' dirigés de M vers F et F' (Poinsot). Les secondes formules de Cesáro donnent ensuite

$$\frac{d\theta}{ds} = \frac{1}{\rho} - \frac{\sin\theta}{r}, \qquad \frac{d\theta'}{ds} = \frac{1}{\rho} - \frac{\sin\theta'}{r'},$$

où ρ désigne le rayon de courbure de l'ovale en M. On en déduit

$$(13) \qquad \lambda \sin\theta \frac{d\theta}{ds} + \lambda' \sin\theta' \frac{d\theta'}{ds} = \frac{\lambda \sin\theta}{\rho} + \frac{\lambda' \sin\theta'}{\rho} - \frac{\lambda \sin^2\theta}{r} - \frac{\lambda' \sin^2\theta'}{r'}.$$

En dérivant (12) par rapport à s, on voit que le premier membre de (13) est nul. Donc

$$(14) \qquad \frac{\lambda \sin\theta + \lambda' \sin\theta'}{\rho} = \frac{\lambda \sin^2\theta}{r} + \frac{\lambda' \sin^2\theta'}{r'}.$$

Comme λ et λ' sont proportionnels à $-\cos\theta'$ et $\cos\theta$, on a, par suite,

$$(15) \qquad \frac{\sin \mathrm{FMF'}}{\rho} = -\frac{\cos\theta' \sin^2\theta}{r} + \frac{\cos\theta \sin^2\theta'}{r'}.$$

Les perpendiculaires élevées en F et F' sur MF

([1]) CESÁRO, *Natürliche Geometrie*, p. 22.

et MF' rencontrent la normale en α et α', celles élevées en α et α' sur cette normale coupent FM et F'M en β et β'. On a alors, d'après (15),

$$\frac{\sin FMF'}{\rho} = \frac{\sin \alpha' M \beta'}{M\beta} + \frac{\sin \alpha M \beta}{M\beta'},$$

ce qui exprime, en vertu d'un théorème élémentaire, que le centre de courbure recherché C appartient à la droite $\beta\beta'$. On a donc cette construction du centre de courbure de l'ovale en M :

Les perpendiculaires élevées en F *et* F' *sur* MF *et* MF' *rencontrent la normale en* α *et* α', *celles élevées en* α *et* α' *sur cette normale coupent* MF *et* MF' *en* β *et* β'. *Le centre de courbure est à l'intersection de* $\beta\beta'$ *avec la normale* [1].

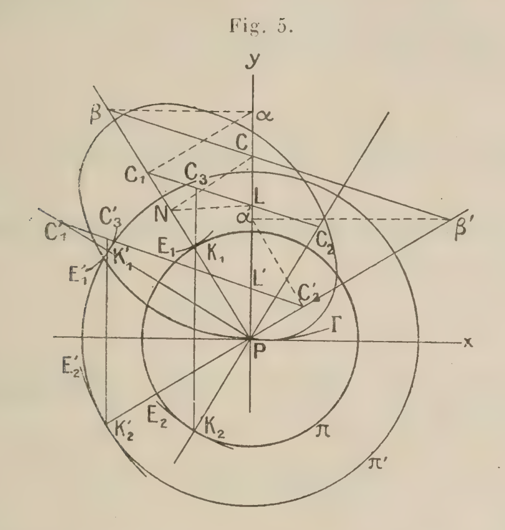
9. *Cercles dilatés ou contractés.* — Supposons qu'on dilate ou contracte dans un rapport donné $\frac{\lambda}{\lambda'}$ les cercles π par rapport à leurs centres et proposons-nous d'étudier les rapports entre les éléments de la figure 1 et ceux de la nouvelle figure (*fig.* 5) obtenue en considérant les cercles dilatés. Appelons R' le rayon du cercle dilaté π' déduit du cercle π, K'_1 et K'_2 les points de contact de π' avec les deux branches E'_1 et E'_2 de la courbe que ce cercle enveloppe quand son centre décrit la courbe Γ, Q' le milieu de $K'_1 K'_2$, C'_1, C'_2 les centres de courbure de E'_1 et E'_2 en K'_1 et K'_2, C'_3 le point où $K'_1 K'_2$ touche son enveloppe.

---

[1] M. R. Bouvaist a donné (*Nouvelles Annales*, 1914, p. 347) une autre construction qui nous paraît moins simple. Elle est déduite directement de la relation (14) sans passer par la forme (15) qui donne lieu à une construction géométrique plus simple.

Il est aisé de voir que $C_1 C_2$ est parallèle à $C'_1 C'_2$.

Fig. 5.



Car, si l'on désigne l'angle $K'_1 P x$ par θ', on a

$$(16) \qquad -\frac{dR'}{ds} = \cos\theta' = \frac{\lambda}{\lambda'}\cos\theta,$$

relation dont l'importance pour l'étude des caustiques par réfraction est évidente. On a ensuite

$$(17) \qquad \sin\theta' \frac{d\theta'}{ds} = \frac{\lambda}{\lambda'}\sin\theta \frac{d\theta}{ds},$$

et, par conséquent,

$$\operatorname{tang}\theta' \frac{d\theta'}{ds} = \operatorname{tang}\theta \frac{d\theta}{ds}.$$

En tenant compte de la valeur du coefficient angulaire de $C_1 C_2$, trouvée au paragraphe 3, on voit que les droites $C_1 C_2$ et $C'_1 C'_2$ sont parallèles.

On considère, pour une position du cercle π, *les points où les cercles* π' *correspondant à des dilatations quelconques touchent les enveloppes* E'_1 *et* E'_2

qui leur correspondent. La droite qui joint les centres de courbure de ces enveloppes en ces points reste parallèle à une direction fixe.

D'autre part, on a

$$PQ' = -R'\frac{dR'}{ds} = -\left(\frac{\lambda}{\lambda'}\right)^2 R\frac{dR}{ds} = \left(\frac{\lambda}{\lambda'}\right)^2 PQ.$$

Or, si l'on désigne par L' le point analogue à L correspondant au cercle π',

$$CL' = \rho\cos^2\theta' = \left(\frac{\lambda}{\lambda'}\right)^2 CL.$$

De là on déduira aisément que le point C'_3 appartient à la droite CC_3 et qu'on a

$$CC'_3 : CC_3 = \left(\frac{\lambda}{\lambda'}\right)^2.$$

Tous les points C'_3 qui correspondent à une position du cercle π et à des rapports de dilatation quelconques appartiennent à une droite issue du centre de courbure C de la courbe Γ au point P.

10. La comparaison des expressions de PC_1 et PC'_2 conduira à une importante généralisation des développements du paragraphe 2.

On a, d'après (6),

$$PC'_2 = \frac{\sin\theta'}{\frac{1}{\rho} - \frac{d\theta'}{ds}} = \frac{\frac{\lambda'}{\lambda}\sin^2\theta'}{\frac{\lambda'}{\lambda}\frac{1}{\rho}\sin\theta' - \frac{\lambda'}{\lambda}\sin\theta'\frac{d\theta'}{ds}},$$

ou, en vertu de (17),

$$PC'_2 = \frac{\frac{\lambda'}{\lambda}\sin^2\theta'}{\frac{\lambda'}{\lambda}\frac{1}{\rho}\sin\theta' - \sin\theta\frac{d\theta}{ds}}.$$

On en déduit

$$(18)\qquad \frac{\lambda'}{\lambda}\,\frac{\sin^2\theta'}{PC'_2} = \frac{\lambda'}{\lambda}\,\frac{1}{\rho}\sin\theta' - \sin\theta\,\frac{d\theta}{ds}.$$

Or,

$$(19)\qquad \frac{\sin^2\theta}{PC_1} = \frac{\sin\theta}{\rho} + \sin\theta\,\frac{d\theta}{ds}.$$

En ajoutant membre à membre les relations (18) et (19), on obtient

$$(20)\qquad \frac{\lambda\sin\theta + \lambda'\sin\theta'}{\rho} = \frac{\lambda\sin^2\theta}{PC_1} + \frac{\lambda'\sin^2\theta'}{PC'_2},$$

relation identique à (14).

Par conséquent, l'ovale de Descartes de foyers C_1 et C'_2, passant par M et correspondant aux constantes λ, λ', a en M même centre de courbure que la courbe Γ. D'où ce théorème qui généralise celui du paragraphe 2 :

Le centre de courbure de la première branche de l'enveloppe du cercle π et celui de la seconde branche de l'enveloppe du cercle dilaté π' sont les foyers d'une ovale de Descartes correspondant à des constantes dont le rapport est celui de la dilatation et qui a au point P *un contact du deuxième ordre avec la courbe* Γ.

On en déduit la construction qui sert à déduire le point C'_2 de C_1 :

On élève en C_1 *sur* PC_1 *une perpendiculaire qui coupe* PC *en* α, *puis en* α *une perpendiculaire sur* $P\alpha$ *qui coupe* PC_1 *en* β; $C\beta$ *rencontre* K'_2P *en* β'. *On projette* β' *en* α' *sur* PC; C'_2 *est la projection de* α' *sur* K'_2P.

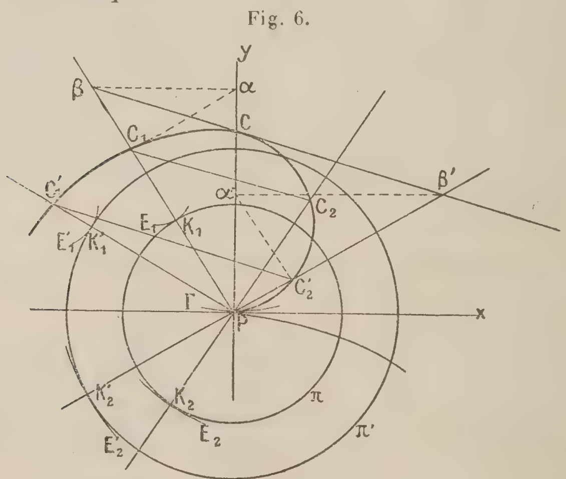
11. Ce résultat permet d'obtenir immédiatement,

pour une position du cercle π, le lieu des points C'_1 et C'_2 correspondant aux cercles dilatés déduits du cercle π en lui faisant subir des dilatations quelconques. Ceci revient à chercher le lieu du second foyer d'une ovale de Descartes qui a pour foyer un point donné et a en un point donné un centre de courbure donné.

Si l'on reprend donc la figure 4, la droite $\beta'C$ étant fixe, on suppose β, α, F mobiles et l'on cherche le lieu de ce dernier point. Or, il est aisé de voir que αF enveloppe une parabole tangente à MC en M. Par suite, le lieu de F est la podaire d'une parabole par rapport à l'un de ses points, c'est-à-dire une cissoïde oblique. On a donc ce théorème :

Le lieu du second foyer d'une ovale de Descartes dont un foyer est un point fixe donné et qui a en un point donné un centre de courbure donné est une cissoïde oblique.

Fig. 6.



Ensuite, revenant à l'étude des enveloppes des cercles dilatés, on a la proposition suivante (*fig.* 6) :

Quand on considère, pour une position du cercle π, *les cercles* π' *correspondant à des rapports de dilatation quelconques, le lieu des centres de courbure de leurs enveloppes* E'_1 *et* E'_2 *aux points de contact avec ces cercles est une cissoïde oblique.*

12. *Lieu des points dont les distances à deux courbes sont dans un rapport constant.* — Quand on considère comme courbes données les courbes E_1 et E'_2, le lieu cherché est la courbe Γ; d'après ce qui précède, sa normale s'obtient en composant deux vecteurs dirigés suivant PC_1 et PC'_2 et proportionnels à λ et λ'.

En outre, on a pour son centre de courbure la construction suivante :

Les perpendiculaires élevées en C_1 *et* C'_2 *sur* PC_1 *et* PC'_2 *rencontrent la normale en* α *et* α', *celles élevées en* α *et* α' *sur cette normale coupent* PC_1 *et* PC'_2 *en* β *et* β'. *Le centre de courbure cherché est le point de rencontre de* $\beta\beta'$ *avec la normale.*

13. *Fibres moyennes.* — Comparons les deux fibres moyennes, lieux des points Q et Q'. D'après le paragraphe 5, leurs normales en ces points coupent PC aux projections T et T' de C_3 et C'_3 sur PC. On a, d'autre part,

$$Q'P : QP = \left(\frac{\lambda}{\lambda'}\right)^2 = C'_3C : C_3C = T'C : TC;$$

d'où ce théorème :

Si l'on considère sur la tangente en un point variable P *d'une courbe* Γ *deux points variables* Q *et* Q' *tels que le rapport* $PQ : PQ'$ *soit constant, le centre de courbure de* Γ *en* P *divise dans le même rapport constant le segment que déterminent sur la*

normale de Γ *en* P *les normales en* Q *et* Q′ *aux lieux de ces points.*

On voit que cette proposition généralise une propriété bien connue des *développées intermédiaires* (1); ce cas s'obtient quand Γ est la développée du lieu de Q.

III. — Cas spéciaux remarquables.

14. *L'inversion.* — Quand la droite K_1K_2 également inclinée sur les courbes E_1 et E_2 passe par un point fixe C_3, ces courbes se correspondent dans une inversion de centre C_3. Le théorème du paragraphe 3 donne alors cette proposition d'ailleurs connue (2) :

Les centres de courbure en deux points correspondants de deux courbes inverses sont en ligne droite avec le centre d'inversion.

Si E_1 et E_2 appartiennent à une même courbe, celle-ci est anallagmatique, la déférente étant la courbe Γ. Les cercles π sont alors orthogonaux à un cercle de centre C_3. Or, si l'on dilate ces cercles dans le rapport constant $\frac{\lambda}{\lambda'}$ par rapport à leurs centres, on aura, en vertu du paragraphe 7,

$$C_3C_3' : C_3C = \frac{\lambda^2 - \lambda'^2}{\lambda'^2};$$

les lieux de C_3' et de C sont donc homothétiques.

Une courbe anallagmatique est l'enveloppe des cercles orthogonaux à un cercle fixe et dont les

---

(1) L. Braude, *Les coordonnées intrinsèques* (*Scientia*), p. 55.

(2) Cesáro, *Natürliche Geometrie*, p. 29.

centres appartiennent à la déférente; si l'on dilate ces cercles dans un rapport constant par rapport à leurs centres, les cordes de contact de ces cercles avec leurs enveloppes sont normales à une courbe homothétique à la déférente.

15. *Le rayon* R *est proportionnel à l'arc s.* — On a dans ce cas

$$(21) \qquad R = as, \qquad \cos\theta = -\frac{dR}{ds} = -a = -\frac{R}{s}.$$

Les développées de E_1 et E_2 sont donc les développoïdes d'angle $\pm\theta$ de la courbe Γ. D'où ce théorème :

Les développoïdes d'une courbe sont les développées des courbes qu'enveloppe un cercle ayant son centre sur la courbe donnée et dont le rayon varie proportionnellement à l'arc de cette courbe.

M. Braude a démontré ([1]) que l'enveloppe des cercles obtenus en contractant les cercles osculateurs d'une courbe dans un rapport constant par rapport à leurs centres, se compose de deux développoïdes de la courbe. Cette propriété résulte des considérations qui précèdent, si l'on prend pour courbe Γ la développée de la courbe considérée et si l'on tient compte de la relation (21).

Quant aux cercles osculateurs contractés par rapport au point de contact avec la courbe donnée, considérés aussi par M. Braude, la construction par points de leur enveloppe résulte du paragraphe 1 et de la propriété des développées intermédaires, que décrivent leurs centres, rappelée au paragraphe 13.

([1]) *Les coordonnées intrinsèques* (*Scientia*), p. 22.

16. *Cas d'un cercle π égal au cercle osculateur.* — Dans ce cas

$$PQ = - R\frac{dR}{ds} = - \rho\frac{d\rho}{ds} = - \rho',$$

ρ' désignant le rayon de courbure de la développée de Γ en C. On a donc ce théorème :

Quand on décrit, de chaque point d'une courbe comme centre, un cercle égal au cercle osculateur, la corde de contact de ce cercle avec son enveloppe a pour enveloppe la troisième développée de la courbe.

En outre, le théorème du paragraphe 3 donne la propriété suivante :

Les centres de courbure de l'enveloppe aux points où elle touche le cercle sont en ligne droite avec le troisième centre de courbure de Γ *en* P.

17. *Courbes isotèles.* — Lorsque la branche E_1 de l'enveloppe se réduit à un point fixe K_1, la courbe Γ est l'isotèle [1] de la courbe E_2 pour le point K_1. La fibre moyenne Φ (*fig.* 7) est alors homothétique à la courbe E_2 et Γ est l'antipodaire de Φ relativement à K_1. On retrouve donc ce théorème bien connu :

L'isotèle d'une courbe E_2 *par rapport à un point* K_1 *est homothétique à l'antipodaire de cette courbe par rapport à* K_1.

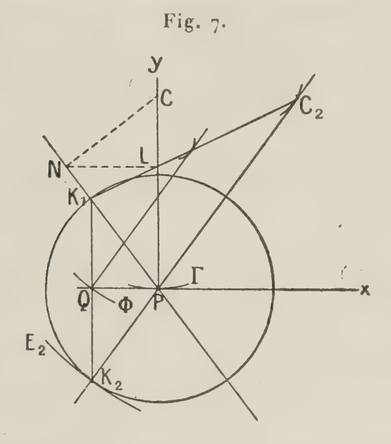
La méthode générale du paragraphe 4 donne la construction suivante du centre de courbure en un point Q de la podaire Φ d'une courbe Γ par rapport à un point K_1 :

---

(1) Loria-Schütte, *Spezielle ebene Kurven*, t. II, p. 356.

On projette le centre de courbure de Γ *au point* P *en* N *sur* K_1P, *puis* N *en* L *sur* PC; *la droite* K_1L *renferme le centre de courbure cherché.*

Fig. 7.



On voit aisément que cette construction ne diffère pas essentiellement de la construction classique ([1]).

Le théorème du paragraphe 2 prend, dans le cas actuel, la forme suivante :

Le lieu des centres des coniques dont un foyer est fixe et qui ont avec une courbe donnée un contact du deuxième ordre est la développée de la podaire de cette courbe.

Dans le cas où la courbe Γ est un cercle passant par le point K_1, on a donc cette propriété :

Le lieu des centres des coniques qui osculent un cercle donné et ont pour foyer un point fixe de ce cercle est une cardioïde.

([1]) Cesáro, *Natürliche Geometrie*, p. 30. — L. Braude, *Les coordonnées intrinsèques*, p. 84.

Si l'on observe que la contre-podaire focale d'une parabole est une autre parabole, on obtient, de même, ce théorème :

Le lieu des centres des coniques dont un des foyers est le foyer d'une parabole et qui ont avec la développée de cette parabole un contact du deuxième ordre est une parabole semi-cubique.

Dans le cas de la spirale logarithmique, on a le résultat suivant :

Le lieu des centres des coniques qui ont avec une spirale logarithmique un contact du deuxième ordre et qui ont le pôle pour foyer est une spirale logarithmique.

18. *Cas où les branches* E_1 *et* E_2 *appartiennent à une même courbe.* — On voit aisément que, dans ce cas, la courbe Γ est le *lieu des points doubles d'une famille de courbes parallèles;* ce sont les courbes parallèles à l'enveloppe des cercles π. Les propriétés de ce lieu Γ déduites des paragraphes 1 et 2 font l'objet de la question 1225 proposée par Cesáro dans *Mathesis* (1899, p. 152).

IV. — Cas ou l'une des branches de l'enveloppe est une droite.

19. *Construction du centre de courbure.* — Si la branche E_2 de l'enveloppe est une droite δ, la branche E_1 peut être considérée comme étant l'enveloppe de la symétrique de δ par rapport aux tangentes de Γ, ou le lieu des foyers des paraboles qui touchent Γ et qui ont δ pour directrice.

La branche E_2 étant une droite, on a

$$\frac{1}{\rho} = \frac{d\theta}{ds}.$$

Dès lors, l'expression de PC_1 devient

$$PC_1 = \frac{\sin\theta}{\frac{1}{\rho} + \frac{d\theta}{ds}} = \frac{\sin\theta}{\frac{2}{\rho}} = \frac{1}{2} PC \sin\theta.$$

On a donc la construction suivante du centre de courbure de l'enveloppe :

Le centre de courbure de E_1 *en* K_1 *est la projection du milieu du rayon de courbure de* Γ *en* P *sur la normale en* K_1 *à* E_1.

Le théorème du paragraphe 2 donne ensuite la propriété suivante :

La développée de E_1 *est le lieu des foyers des paraboles dont l'axe est perpendiculaire à* δ *et qui ont avec* Γ *un contact du deuxième ordre.*

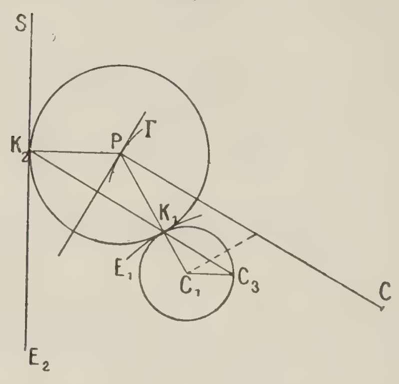
Les enveloppes E_1 qui correspondent à des droites δ parallèles sont des courbes parallèles.

20. Dans le cas qui nous occupe, le point C_3 où la corde K_1K_2 touche son enveloppe jouit d'une propriété intéressante. En vertu du paragraphe 3, ce point se trouve sur la perpendiculaire menée par C_1 à δ puisque cette perpendiculaire renferme le centre de courbure de la courbe E_2 en K_2. Les triangles K_1PK_2 et $K_1C_1C_3$ (*fig.* 8) étant semblables, C_1C_3 est égal à C_1K_1 et le point C_3 appartient au cercle osculateur de E_1 en K_1. On a donc ce théorème :

Si l'une des branches de l'enveloppe est une

droite, la corde de contact du cercle variable avec

Fig. 8.



son enveloppe touche son enveloppe sur le cercle osculateur de l'autre branche.

21. Remarquons que la tangente en C_3 au lieu de ce point est la droite C_3K_1 ; comme C_1C_3 est parallèle à une direction fixe et est égal au rayon de courbure de la courbe E_1 en K_1, on peut énoncer la propriété que nous venons de trouver sous la forme suivante :

Si, par le centre de courbure correspondant à chaque point d'une courbe, on mène, parallèlement à une direction fixe, un segment égal au rayon de courbure en ce point, la tangente à l'extrémité de ce segment au lieu de ces extrémités passe par le point correspondant de la courbe.

C'est un théorème dû à M. d'Ocagne [1].

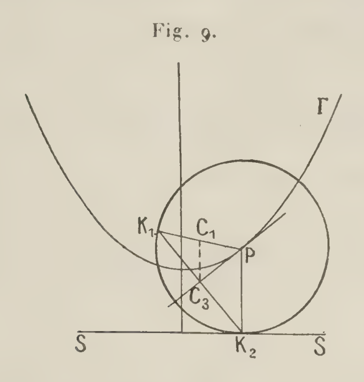
22. Une autre conséquence du théorème du paragraphe 3 est la construction bien connue du centre de

---

[1] *Nouvelles Annales*, 1903, p. 46; 1915, p. 6.

courbure de la *syntractrice*. Considérons (*fig.* 9) comme courbe Γ une chaînette ayant δ pour base. La branche E_1 de l'enveloppe est le lieu du symétrique,

Fig. 9.



par rapport à la tangente en un point P de Γ, de la projection K_2 de ce point sur δ; c'est la syntractrice. La normale en K_1 à cette courbe est la droite K_1P. Or, le point C_3 où la corde de contact du cercle variable avec la droite δ et la syntractrice touche son enveloppe est le milieu de K_1K_2; de plus, la perpendiculaire menée de C_3 à δ contient le centre de courbure de E_1 en K_1. On retrouve donc cette construction donnée par M. d'Ocagne (*Nouvelles Annales*, 1891, p. 96) :

Le centre de courbure C_1 *de la syntractrice en* K_1 *est le milieu de* K_1P.

23. Considérons encore le cas où la courbe Γ est une logarithmique; alors la sous-tangente de Γ relative à δ est constante. Il en résulte que le segment de la tangente en K_1 à la branche E_1 de l'enveloppe, compris entre K_1 et δ, est constant. La courbe E_1 est donc alors une tractrice. On a donc ce théorème :

La tractrice est l'enveloppe d'un cercle dont le centre décrit une logarithmique et qui en touche l'asymptote.

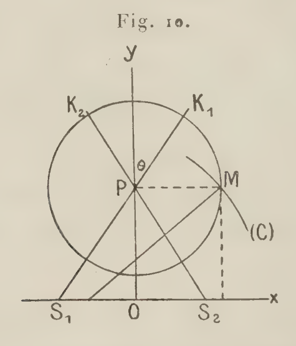
On peut l'énoncer sous la forme suivante bien connue :

La caustique par réflexion d'une logarithmique pour des rayons perpendiculaires à l'asymptote est une chaînette (¹).

V. — Cas où le centre du cercle décrit une droite. Développantes d'astroïdes.

24. Projetons (*fig.* 10) un point variable M d'une courbe (C) en P sur une droite Γ et considérons le cercle π de centre P, de rayon PM. Prenons Γ pour

Fig. 10.



axe des y et la perpendiculaire élevée sur Γ en un point O pour axe des x. Si l'on se reporte aux notations antérieurement utilisées, x joue le rôle de R, y celui de s. Nous aurons donc

$$\cos\theta = -\frac{dR}{ds} = -\frac{dx}{dy}.$$

(¹) Loria-Schütte, *Spezielle ebene Kurven*, t. II, p. 306.

Dès lors, si nous désignons par ξ et η les coordonnées des points K_1 et K_2 où le cercle π touche son enveloppe, nous avons

$$(22)\qquad \begin{cases} \xi = \phantom{y+{}} x\sin\theta = \pm x\sqrt{1-\left(\dfrac{dx}{dy}\right)^2}, \\ \eta = y + x\cos\theta = y - x\dfrac{dx}{dy}. \end{cases}$$

Inversement, on peut trouver une courbe (C) telle que l'enveloppe considérée soit une courbe donnée. La normale au point K_1 de l'enveloppe a pour équation

$$Y - \eta = -\frac{1}{\eta'}(X - \xi).$$

On en déduit

$$OP = \eta + \frac{\xi}{\eta'}, \qquad K_1P = \sqrt{\xi^2 + \frac{\xi^2}{\eta'^2}} = \frac{\xi}{\eta'}\sqrt{1+\eta'^2}.$$

On a donc

$$x = \frac{\xi}{\eta'}\sqrt{1+\eta'^2}, \qquad y = \eta + \frac{\xi}{\eta'}.$$

Si deux courbes (C) sont déduites l'une de l'autre par une translation parallèle à Ox, les enveloppes correspondantes sont des courbes parallèles.

25. *Construction des points de contact du cercle π avec son enveloppe.* — Soit S_1 le point où la normale en K_1 à l'enveloppe coupe l'axe Ox. On a

$$S_1P = \frac{OP}{\cos\theta} = -\frac{y}{\dfrac{dx}{dy}}.$$

Le segment S_1P est donc égal à la sous-normale de la courbe (C) au point M. On a donc la construction suivante des points K_1 et K_2 :

De P *comme centre on décrit, avec la sous-normale de* (C) *en* M *comme rayon, un cercle qui coupe* Ox *en* S_1 *et* S_2; *les points* K_1 *et* K_2, *sont à l'intersection de* π *avec les droites* PS_1 *et* PS_2.

Ces intersections donnent lieu à quatre points; mais il suffit, pour trouver les points K_1 et K_2, de remarquer que l'angle θ est aigu ou obtus suivant que x décroît ou croît avec y.

26. Si l'on applique les équations (22) au cas d'une parabole du second degré

$$y^2 = 2p(x+\alpha),$$

on obtient pour l'enveloppe les équations paramétriques

$$\xi = \pm\left(\frac{y^2}{2p} - \alpha\right)\sqrt{1 - \frac{y^2}{p^2}},$$
$$\eta = y - \left(\frac{y^2}{2p} - \alpha\right)\frac{y}{p},$$

où y est le paramètre. Ces équations représentent une sextique. Les enveloppes qui correspondent aux différentes valeurs de α sont des courbes parallèles.

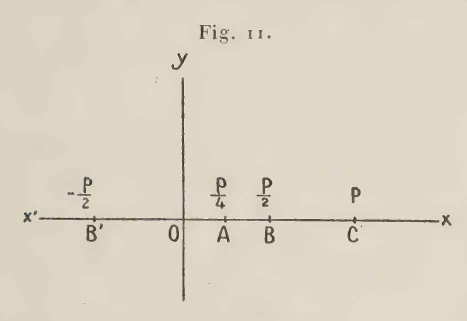
Ces courbes méritent une attention spéciale. En effet, dans le cas de la parabole, la sous-normale de (C) étant constante, l'enveloppe est, d'après la construction indiquée au paragraphe précédent, une *développante d'astroïde*.

On obtient donc cette définition nouvelle des développantes d'astroïdes :

Si l'on projette un point variable M *d'une parabole en* P *sur une perpendiculaire à l'axe, le cercle de centre* P *et de rayon* PM *enveloppe une développante d'astroïde.*

27. On sait que cette famille de développantes comprend une astroïde droite et ses courbes parallèles, parmi lesquelles il y a des croix de Malte, des astroïdes obliques et des parastroïdes. Considérons la parabole $y^2 = 2px$ de foyer B (*fig.* 11); marquons sur l'axe xOx' les points A, B, C, B' d'abscisses $\frac{p}{4}$, $\frac{p}{2}$, p, $-\frac{p}{2}$. Si l'on fait subir à la parabole une translation parallèle

Fig. 11.



à Ox, on aura pour enveloppes les courbes suivantes, d'après les positions du sommet de la parabole :

En O : demi-croix de Malte, avec Oy comme tangente au point autotangentiel;

De O à A : astroïdes obliques;

En A : astroïde droite;

De A à B : astroïdes obliques;

En B : demi-croix de Malte, avec Ox comme tangente au point autotangentiel;

De B à C : parastroïdes;

En C : courbe limite (*sextique ovale*) entre les développantes à rebroussements et celles sans rebroussements;

Au delà de C : parastroïdes.

Quand la parabole subit une translation dans le sens de Ox', toutes les enveloppes sont des parastroïdes;

dans le cas où le sommet est en B′, on a encore une courbe limite [1].

VI. — Les caustiques.

28. *Caustiques par réfraction.* — La relation (16) montre que la développée de E_2 est la caustique par réfraction de la courbe Γ pour des rayons tangents à la développée de E_1, l'indice de réfraction étant égal au rapport de dilatation des cercles. C'est le théorème de Gergonne [2] :

La courbe enveloppe des rayons incidents et la caustique par réfraction d'une courbe Γ *produite par ces rayons sont les développées des enveloppes de deux familles de cercles* π *et* π′ *ayant leurs centres sur la courbe* Γ *et dont les uns* π′ *sont déduits des autres* π *par une dilatation constante.*

Les longueurs l_1 et l_2 des rayons incidents et réfractés, comprises entre leurs points de contact avec leurs enveloppes et la courbe Γ, sont liées par la relation

$$\frac{\lambda \sin\theta + \lambda' \sin\theta'}{\rho} = \frac{\lambda \sin^2\theta}{l_1} + \frac{\lambda' \sin^2\theta'}{l_2} \quad [3].$$

Les développements du paragraphe 10 permettent de construire la caustique par points :

La normale à l'enveloppe du rayon incident au point où ce rayon touche son enveloppe rencontre

---

[1] C'est le cas où Γ est la corde focale principale; il a été considéré par M. Barisien (question 1948 de *Mathésis*, 1913, p. 280). Le fait que cette sextique est une développante d'astroïde ne semble pas avoir été remarqué.

[2] *Sur les caustiques planes* (*Annales de Math.*, 1824-1825).

[3] Magnus, *Sammlung von Aufgaben und Lehrsätzen aus der analytischen Geometrie*, Berlin, 1833, p. 467.

en α celle de la courbe Γ *au point d'incidence* P; *la perpendiculaire élevée en α sur cette dernière normale coupe le rayon incident en* β. *La droite qui joint* β *au centre de courbure* C *de* Γ *en* P *coupe le rayon réfracté en* β'; *on projette* β' *en* α' *sur* PC; *la projection de* α' *sur le rayon réfracté est le point où ce rayon touche la caustique.*

Dans le cas de rayons incidents parallèles, cette construction se simplifie :

On mène par C, *parallèlement à ces rayons, une droite coupant le rayon réfracté en* β'; *on projette* β' *en* α' *sur la normale à* Γ. *La projection de* α' *sur le rayon réfracté est un point de la caustique.*

En outre, on a ce théorème général :

Les points correspondants de l'enveloppe des rayons incidents et de la caustique par réfraction sont les foyers d'une ovale de Descartes correspondant à des constantes dont le rapport est l'indice de réfraction et qui a, au point d'incidence, un contact du deuxième ordre avec Γ.

Enfin, d'après le paragraphe 9, on a encore cette propriété :

Si l'indice de réfraction varie, le lieu des points des caustiques produites correspondant à un même rayon incident est une cissoïde oblique.

29. *Caustiques par réflexion.* — Dans ce cas, la construction de la caustique par points résulte du paragraphe 2 :

On projette le centre de courbure C *de la courbe*

réfléchissante Γ *au point d'incidence en* N *sur le rayon incident; on projette* N *en* L *sur* PC. *La droite qui joint le point où le rayon incident touche son enveloppe au point* L *rencontre le rayon réfléchi en un point de la caustique.*

Quand on considère un faisceau de rayons incidents, on a, en vertu des propriétés des courbes isotèles (§ 17), le théorème suivant :

La caustique par réflexion d'une courbe Γ, *pour un faisceau de rayons incidents issus d'un point* K_1, *est homothétique à la développée de la podaire de* Γ *par rapport à* K_1.

On peut ainsi considérer la *cardioïde* comme caustique d'un *cercle*, la *parabole de Neil* comme caustique d'une autre parabole de Neil, la *spirale logarithmique* comme caustique d'une autre spirale logarithmique.

Si les rayons incidents sont parallèles, on a (§ 19) cette construction bien connue du point où un rayon réfléchi touche la caustique :

Le point de contact d'un rayon réfléchi avec la caustique s'obtient en projetant sur ce rayon le milieu du rayon de courbure de la courbe réfléchissante au point d'incidence.

Ce cas correspond à celui d'une famille de cercles dont l'une des branches de l'enveloppe est une droite perpendiculaire à la direction des rayons incidents.

VII. — Sur les familles de sphères.

30. Si l'on prend pour axes de coordonnées la tangente, la binormale et la normale principale en un

point P d'une courbe gauche Γ et si l'on appelle ρ et r les rayons de courbure et de torsion en ce point, les conditions nécessaires et suffisantes pour qu'un point (x, y, z) de l'espace soit fixe sont [1]

$$(23)\qquad \frac{dx}{ds} = \frac{z}{\rho} - 1, \qquad \frac{dy}{ds} = \frac{z}{r}, \qquad \frac{dz}{dr} = -\frac{x}{\rho} - \frac{y}{r}.$$

D'autre part, l'enveloppe de la surface

$$f(x, y, z, s) = 0$$

s'obtient en éliminant s entre cette équation et

$$\frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{ds} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{ds} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{dz}{ds} + \frac{\partial f}{\partial s} = 0,$$

ou, eu égard aux conditions (23),

$$(24)\qquad \left(\frac{z}{\rho} - 1\right)\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{z}{r}\frac{\partial f}{\partial y} - \left(\frac{x}{\rho} + \frac{y}{r}\right)\frac{\partial f}{\partial z} + \frac{\partial f}{\partial z} = 0.$$

Ceci posé, considérons la sphère π d'équation

$$(25)\qquad f(x, y, z, s) \equiv x^2 + y^2 + z^2 - R^2 = 0.$$

Pour cette sphère, l'équation (24) devient

$$x + R\frac{dR}{ds} = 0.$$

La sphère π touche son enveloppe suivant un cercle dont le plan est perpendiculaire à la tangente en P à la courbe gauche Γ.

31. Posons

$$(26)\qquad -\frac{dR}{ds} = \cos\theta.$$

Le cône Σ qui projette de P le cercle de contact de

---

[1] Cesáro, *Natürliche Geometrie*, p. 156.

la sphère avec son enveloppe a pour équation

(27) $$y^2 + z^2 - x^2 \operatorname{tang}^2\theta = 0.$$

Cherchons les équations de la courbe le long de laquelle ce cône touche son enveloppe. En dérivant (27) sous la forme (24), on obtient

$$-\left(\frac{z}{\rho} - 1\right)x \operatorname{tang}^2\theta + \frac{zy}{r}$$
$$-\left(\frac{x}{\rho} + \frac{y}{r}\right)z - x^2 \frac{\operatorname{tang}\theta}{\cos^2\theta}\frac{d\theta}{ds} = 0,$$

ou, toutes réductions faites,

(28) $$x \operatorname{tang}\theta \frac{d\theta}{ds} + \frac{z}{\rho} - \sin^2\theta = 0.$$

Cette équation représente le plan de la conique le long de laquelle le cône Σ touche son enveloppe. Considérons, d'autre part, le plan du cercle de contact de π avec son enveloppe

(29) $$x - R\cos\theta = 0.$$

La droite le long de laquelle ce plan touche son enveloppe appartient au plan dont l'équation s'obtient en dérivant l'équation (29) sous la forme (24). On trouve ainsi

$$\frac{z}{\rho} - 1 - \frac{dR}{ds}\cos\theta + R\sin\theta\frac{d\theta}{ds} = 0,$$

ou, en tenant compte de (26),

(30) $$z = \rho\sin\theta\left(\sin\theta - R\frac{d\theta}{ds}\right).$$

Or, on voit aisément que le plan (30) contient la droite représentée par les équations (28) et (29). Nous

avons ainsi cette extension à l'espace du théorème du paragraphe 3 :

Le plan du cercle de contact d'une sphère π *avec son enveloppe touche son enveloppe suivant une droite* Δ *qui appartient au plan de la conique* S *suivant laquelle le cône qui projette ce cercle du centre de la sphère touche son enveloppe.*

32. Les équations (7) et (28) étant identiques, les propriétés des points C_1 et C_2 donnent lieu à des propriétés identiques des sommets A_1 et A_2 de la conique S; ces sommets appartiennent au plan osculateur de Γ en P.

Les sommets de la conique S *sont les foyers d'une conique située dans le plan osculateur de la courbe gauche et ayant en* P *même centre de courbure que cette courbe.*

Considérons encore les familles de sphères π' déduites des sphères π par une dilatation constante; envisageons pour ces sphères π' les divers éléments S', A'_1, A'_2, Δ' analogues aux éléments S, A_1, A_2, Δ relatifs aux sphères π. Si l'on considère une position de la sphère π et les sphères π' concentriques, correspondant à diverses valeurs du rapport de dilatation, on a, en vertu de l'analogie des équations (7) et (28), les propriétés suivantes :

Le plan de la conique S' *se déplace parallèlement à lui-même; les sommets* A'_1 *et* A'_2 *décrivent dans le plan osculateur de* Γ *en* P *une cissoïde oblique; la droite* Δ' *se déplace dans un plan qui contient le centre de courbure de* Γ *en* P.

33. Si l'on suppose que la sphère π reste orthogonale à une sphère fixe de rayon k, l'enveloppe est une

surface anallagmatique. On a alors, en désignant par (α, β, γ) les coordonnées du centre de la sphère fixe par rapport au trièdre fondamental de Γ en P,

$$R^2 = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 - k^2,$$

d'où

$$-R\frac{dR}{ds} = -\left(\alpha\frac{d\alpha}{ds} + \beta\frac{d\beta}{ds} + \gamma\frac{d\gamma}{ds}\right) = \alpha,$$

puisque α, β, γ satisfont aux conditions (23). Le plan du cercle de contact de la sphère π avec son enveloppe passe donc par le centre de la sphère fixe, centre d'inversion. On a alors, d'après le théorème du paragraphe 31, la propriété suivante :

Si la sphère π reste orthogonale à une sphère fixe, elle enveloppe une surface anallagmatique; le cône Σ qui projette du centre de la sphère le cercle de contact de celle-ci avec cette surface touche son enveloppe suivant une conique S *dont le plan passe toujours par le centre d'inversion.*

Ce théorème est à comparer à la propriété des centres de courbure aux points correspondants de deux courbes inverses, retrouvée au paragraphe 14.

34. Si le rayon R est proportionnel à l'arc s, l'angle θ est constant; on trouve alors cette propriété, qui peut être considérée comme une extension à l'espace de la propriété fondamentale des développoïdes :

Si l'on considère un cône de révolution d'angle constant ayant pour axe la tangente à une courbe gauche Γ *en un point variable* P, *ce cône touche son enveloppe suivant une hyperbole dont les sommets sont les projections du centre de courbure de* Γ *en* P *sur les génératrices de ce cône situées dans le plan osculateur.*

[O¹6p]

SUR LES SYSTÈMES ORTHOGONAUX ;

PAR M. A. PELLET.

1. Soit

$$\Theta = \sum_{i=1}^{i=m} \frac{X_i}{Y_i - \lambda} + \sum_{j=1}^{j=m} Z_j + \varphi(\lambda),$$

X_i, Y_i étant des fonctions de la seule coordonnée x_i, Z_j de z_j, et $\varphi(\lambda)$ une fonction entière de λ.

La fonction u des variables x et z définie par l'intégrale

$$\int_0^\lambda \lambda^\alpha \Theta \, d\lambda = u,$$

où la limite supérieure est racine de $\Theta = 0$, a pour différentielle totale le produit de $\frac{\lambda^{\alpha+1}}{\alpha}$ par

$$\sum_{i=1}^{i=m} \frac{X'_i}{Y_i - \lambda} \, dx_i + \frac{\alpha}{\alpha + 1} \left[\sum_{i=1}^{j=m} Z'_j \, dz_j \right],$$

si les m fonctions Y_i satisfont à l'équation différentielle

$$(1) \qquad \alpha X Y' + Y X' = 0,$$

où l'on a effacé l'indice ; $\alpha > -1$.

En effet,

$$\frac{\partial u}{\partial x_i} = \int_0^\lambda \lambda^\alpha \left[\frac{(Y_i - \lambda) X'_i - X_i Y'_i}{(Y_i - \lambda)^2} \right] d\lambda$$
$$= \lambda^\alpha \frac{(Y_i - \lambda) X'_i - X_i Y'_i}{Y_i - \lambda} - \int_0^\lambda (\alpha + 1) X' \lambda^{\alpha - 1} \, d\lambda,$$

en tenant compte de la relation (1); et réduisant, il vient

$$\frac{\partial u}{\partial x_i} = \frac{\lambda^{\alpha+1}}{\alpha} \frac{X'_i}{Y_i - \lambda}.$$

D'ailleurs,

$$\frac{\partial u}{\partial z_j} = \int_0^\lambda Z'_j \lambda^\alpha \, dz_i = Z'_j \frac{\lambda^{\alpha+1}}{\alpha+1}$$

et $\frac{\partial u}{\partial \lambda} = 0$, puisque la limite supérieure annule Θ. Il en résulte que l'enveloppe des surfaces

$$\int_0^\lambda \lambda^\alpha \left[\sum_1^m \frac{x_i^2}{a_i x_i^{-\frac{2}{\alpha}} - \lambda} + 2bz + \frac{\alpha^2 b^2}{(\alpha+1)^2} \lambda + c \right] d\lambda = u,$$

λ étant le paramètre variable forme un système orthogonal lorsqu'on y fait varier u. Si b n'est pas nul, on peut remplacer c par 0, et l'exposant α doit être supérieur à -1. Pour b nul, $\alpha = -1$ et

$$c = -\sum_1^m \frac{1}{a_i};$$

on a le système étudié à la page 141 des *Leçons sur les Systèmes orthogonaux* par M. Darboux.

2. De même la fonction u définie par l'intégrale

$$\int_{+\infty}^\lambda e^{-\lambda} \Theta \, d\lambda = u,$$

où la limite supérieure annule Θ, a pour différentielle totale le produit $-e^{-\lambda}$ par

$$\sum_1^m \frac{X'_i}{Y_i - \lambda} dx_i + \sum_1^n Z'_j \, dz_j,$$

si les fonctions Y_i, X_i sont liées par la relation

$$X_i Y_i' = X_i' \qquad \text{ou} \qquad Y_i = a_i + l x_i.$$

On en déduit le système orthogonal

$$(2) \quad \int_{+\infty}^{\lambda} e^{-\lambda} \left[\sum_1^m \frac{x^2}{l x_i + a_i - \lambda} + 2 b z_1 + b^2 \lambda + c \right] d\lambda = u,$$

$$\sum_1^m \frac{x_i}{l x_i + a_i - \lambda} + 2 b z + b^2 \lambda + c = 0,$$

formé en faisant varier u dans l'enveloppe de la surface (2), où l'on considère λ comme le paramètre.

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES.

1655 et **1656** (numéros rectifiés).

1655.

(1893, p. 52*.)

Démontrer que la somme des carrés des coefficients binomiels d'un nombre entier positif a

$$\sum_{k=0}^{k=a} \binom{a}{k}^2$$

n'est JAMAIS *divisible par un nombre premier* $p > 2a$, *mais toujours divisible par* TOUS *les nombres premiers compris entre*

$$\frac{2a}{2n+2} \quad \text{et} \quad \frac{2a}{2n+1},$$

où n est un nombre entier positif et $< a$; et que la même somme n'est pas divisible par un même nombre premier p

compris entre

$$\frac{2a}{2n+3} \quad \text{et} \quad \frac{2a}{2n+2},$$

excepté si une puissance de p (supérieure à l'unité) se trouve dans l'intervalle de a jusqu'à 2a.

C. SZILY.

1656.

(1893, p. 52*.)

Démontrer les identités suivantes :

$$(1) \qquad \sum_{k=0}^{k=a} \binom{a}{k}^2 = \sum_{k=0}^{k=m} 2^{a-2k} \binom{a}{k} \binom{a-k}{k},$$

où

$$m = \varepsilon\left(\frac{a}{z}\right);$$

$$(2) \qquad \sum_{k=0}^{k=a} \binom{a}{k}^2 = 2 \sum_{k=0}^{k=a-1} \binom{a}{k} \binom{a-1}{k}$$

$$= \frac{2(2a-1)}{a-1} \sum_{k=1}^{k=a-1} \binom{a-1}{k} \binom{a-1}{k-1};$$

$$(3) \qquad \sum_{k=0}^{k=a} \binom{a}{k}^2 = \frac{a+1}{a} \sum_{k=1}^{k=a-1} \binom{a}{k} \binom{a}{k-1};$$

$$(4) \qquad \sum_{k=0}^{k=a} \binom{a}{k}^2 = (-1)^a \sum_{k=0}^{k=2a} (-1)^k \binom{2a}{k}^2;$$

$$(5) \qquad \frac{\displaystyle\sum_{k=0}^{k=a} \binom{a}{k}^2 \sum_{k=0}^{k=b} \binom{b}{k}^2}{\displaystyle\sum_{k=0}^{k=b} \binom{a}{k} \binom{b}{k}} = \sum_{k=-b}^{k=b} (-1)^k \binom{2a}{a-k} \binom{2b}{b-k},$$

où b est un nombre entier positif $< a$

C. SZILY.

Solutions sommaires

Par M. H. Brocard.

Le retard de la réponse provient sans doute de la méconnaissance de l'expression algébrique du nombre à étudier, ou du moyen de l'obtenir, et peut-être aussi de la notation adoptée, qui n'aura pas été saisie de quelques lecteurs.

Par un procédé empirique, on reconnaît aisément que ΣC^2 est un des nombres de la médiane du triangle arithmétique de Pascal. Ceci autorise à conclure, par analogie, que ΣC^2 pour le degré n est le milieu des nombres C répondant au degré $2n$.

La méthode élégante et ingénieuse que voici, due à Laplace, est fondée sur l'observation que ΣC^2 est la partie indépendante de u du développement de $(1+u)^a\left(1+\frac{1}{u}\right)^a$ ou de $\frac{(1+u)^{2a}}{u^a}$; mais ce terme étant celui du milieu, il en résulte que ΣC^2 est le terme moyen T_m du binome $(1+1)^{2a}$.

La formule T peut s'écrire

$$T = \frac{1.2.3\ldots 2a}{(1.2.3\ldots a)^2},$$

comme cela a été indiqué ici, d'après Lagrange, dans une question (n° **389**), proposée en 1857 et résolue, même année, pages 296, 369 et 375.

Avec la notation de l'énoncé **1655**, on a

$$T = \sum_{k=0}^{k=a}\binom{a}{k}^2 = \Sigma C^2(1+1)^2 = \frac{(2a)!}{(a!)^2},$$

$$T = T_m(1+1)^{2a} = \frac{(a+1)(a+2)(a+3)\ldots 2a}{1.2.3\ldots a}.$$

Toutes les propriétés arithmétiques du nombre T découleront de sa composition en fonction de a. C'est ainsi, par exemple, que les diviseurs de T, qui est toujours entier parce qu'il est un nombre combinatoire, ne peuvent être que des diviseurs du produit $(a+1)\ldots 2a$; donc il n'y en a pas au-dessus de $2a$.

Quant aux autres propositions énoncées, je signalerai leur relation avec la question **295** de Cesàro (*Mathesis*, 1883, p. 248) précisément au sujet des facteurs premiers de la même formule T. (Voir *Mathesis*, 1886, p. 179-180.)

Pour la bibliographie de T, *voir* aussi : *N. A.*, 1875, p. 527 (C. Moreau); *Mathesis*, 1892, p. 272 (J. Neuberg); *J. de Math. sp.*, 1893, p. 7-9 (G. de Longchamps).

Note. — En se servant de notations plus familières à nos lecteurs pour représenter les nombres combinatoires, il se pourra qu'on parvienne aisément à établir les autres propriétés du nombre T énoncées dans la question **1656**.

1678.

(1894, p. 4*.)

Lieu des sommets et enveloppe des axes des paraboles conjuguées par rapport à un triangle donné.

A. Cazamian.

Solution

Par un abonné.

Les paraboles conjuguées par rapport à un triangle sont inscrites dans le triangle obtenu en joignant les milieux des côtés du premier. Pour s'en assurer, il suffit de remarquer que le premier triangle est le triangle diagonal du quadrilatère, formé par les trois côtés du second et la droite de l'infini. On sait alors que le foyer F d'une parabole répondant à la question est sur le cercle circonscrit au second triangle et que la tangente au sommet est la droite de Simpson de F. Le problème revient donc à chercher le lieu du point de rencontre d'une droite de Simpson avec la perpendiculaire abaissée du point correspondant, ainsi que l'enveloppe de cette perpendiculaire. Or, ce problème a fait l'objet de la question **1505** (1884, p. 447), déjà résolue dans les *Nouvelles Annales*.

Note de la Rédaction. — Dans une autre réponse, M. H. Brocard démontre l'identité de la question **1678** avec la question **1545**, récemment résolue par M. d'Ocagne (1915, p. 469-471).

Cette réponse surtout bibliographique, et datant d'août 1915, sera publiée prochainement.

1841.

(1900, p. 190.)

Dans un quadrilatère complet, les quatre orthocentres et les points où la ligne de ces orthocentres est coupée par les quatre côtés sont huit points en involution.

C. Blanc.

Solution

Par un abonné.

Il existe une parabole et une seule tangente aux quatre côtés du quadrilatère et sa directrice est la ligne des orthocentres. Soit

$$y^2 - 2px = 0$$

son équation.

Les quatre côtés auront des équations de la forme

$$y = m_i x + \frac{p}{2m_i} \qquad (i = 1, 2, 3, 4),$$

m_i désignant le coefficient angulaire d'une tangente à la parabole. L'orthocentre du triangle formé par les trois premières tangentes ($i = 1, 2, 3$) a pour ordonnée

$$y_4 = \frac{p}{2m_1 m_2 m_3}(1 + m_2 m_3 + m_3 m_1 + m_1 m_2).$$

D'autre part, la directrice de la parabole, ou ligne des orthocentres, rencontre le quatrième côté en un point qui a pour ordonnée

$$\gamma_4 = \frac{p}{2m_4}(1 - m_4^2).$$

Il faut prouver que les points y_4 et γ_4, et les points analogues, forment une involution. Pour cela, il faut et il suffit qu'on puisse déterminer deux constantes α et β telles qu'on ait

$$y_i \gamma_i + \alpha(y_i + \gamma_i) + \beta = 0 \qquad (i = 1, 2, 3, 4).$$

Or, si l'on forme les quantités $y_4\gamma_4$ et $y_4 + \gamma_4$, on trouve

$$y_4\gamma_4 = \frac{p^2}{4m_1 m_2 m_3 m_4}(1 - m_4^2 + m_2 m_3 + m_3 m_1 + m_1 m_2 - m_4 \Sigma m_1 m_2 m_4 + m_1 m_2 m_3 m_4),$$

$$y_4 + \gamma_4 = \frac{p}{2m_1 m_2 m_3 m_4}[m_4(1 - m_1 m_2 m_3 m_4) + \Sigma m_1 m_2 m_3].$$

Si l'on prend les trois premières valeurs de ces quantités, correspondant à $i = 1, 2, 3$, pour que les constantes α et β existent, il faut que le déterminant

$$\begin{vmatrix} y_1\gamma_1 & y_1+\gamma_1 & 1 \\ y_2\gamma_2 & y_2+\gamma_2 & 1 \\ y_3\gamma_3 & y_3+\gamma_3 & 1 \end{vmatrix}$$

soit nul. Or, si l'on remplace $y_i\gamma_i$, $y_i+\gamma_i$ par leurs valeurs et si l'on effectue les calculs, on trouve bien zéro pour résultat. Si l'on remplace $y_3\gamma_3$, $y_3+\gamma_3$ respectivement par $y_4\gamma_4$, $y_4+\gamma_4$, et si l'on effectue le même calcul, le résultat est le même. Les constantes α et β existent bien et le théorème est démontré.

1878.

(1900, p. 571.)

On considère une ellipse E *et le cercle* C *concentrique à l'ellipse ayant pour diamètre la somme des axes de* E. *D'un point* M *quelconque de* C *on mène les tangentes à* E *dont les points de contact sont* P *et* Q. *Soit* (Π) *la parabole tangente en* P *et* Q *aux droites* MP *et* MQ.

1° *Le lieu des foyers des paraboles* (Π) *est l'ellipse* E;

2° *Les paraboles* (Π) *sont tangentes à la développée de l'ellipse* E;

3° *La directrice des paraboles* (Π) *enveloppe un cercle;*

4° *L'axe des paraboles* (Π) *enveloppe une hypocycloïde à quatre rebroussements.* E. Barisien.

Solution

Par un abonné.

Soient α et β les coordonnées du point M. On a

$$\alpha^2+\beta^2=(a+b)^2. \tag{1}$$

L'équation du point M est

$$\alpha u+\beta v-1=0; \tag{2}$$

et celle de la parabole (Π) en coordonnées tangentielles

$$a^2u^2+b^2v^2-1+(\alpha u+\beta v-1)^2=0. \tag{3}$$

On obtient les coordonnées (x_0, y_0) du foyer de la parabole (II) en exprimant que la droite

$$y - y_0 = i(x - x_0)$$

est tangente à (3). On trouve ainsi

$$x_0 = \frac{\alpha(\alpha^2 + \beta^2 + c^2)}{2(\alpha^2 + \beta^2)}, \quad y_0 = \frac{\beta(\alpha^2 + \beta^2 - c^2)}{2(\alpha^2 + \beta^2)} \quad (c^2 = a^2 - b^2).$$

On en déduit, en tenant compte de (1),

$$\alpha = (a + b)\frac{x_0}{a}, \qquad \beta = (a + b)\frac{y_0}{b};$$

d'où

$$\frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} - 1 = 0;$$

ce qui démontre la première partie.

En écrivant que la directrice est le lieu des points d'où l'on peut mener deux tangentes rectangulaires à (II), on trouve pour son équation

$$\alpha x + \beta y - \frac{a^2 + b^2 + \alpha^2 + \beta^2}{2} = 0.$$

En tenant compte de (1), on voit qu'elle enveloppe le cercle ayant pour centre l'origine et pour rayon

$$\frac{a^2 + b^2 + ab}{a + b}.$$

L'axe de (II) passe par le foyer et est perpendiculaire à la directrice, son équation est donc

$$y - \frac{b\beta}{a + b} - \frac{\beta}{\alpha}\left(x - \frac{a\alpha}{a + b}\right) = 0;$$

ou bien

$$\frac{a + b}{a - b}\left(\frac{x}{\alpha} - \frac{y}{\beta}\right) - 1 = 0.$$

Les coordonnées tangentielles de cette droite sont donc

$$u = \frac{a + b}{\alpha(a - b)}, \qquad v = -\frac{(a + b)}{\beta(a - b)};$$

et, en vertu de (1), elle enveloppe l'hypocycloïde à quatre rebroussements

$$\frac{1}{u^2}+\frac{1}{v^2}=(a-b)^2.$$

Il reste enfin à trouver l'enveloppe des paraboles (II). Nous avons fait le calcul de plusieurs façons et nous n'avons jamais trouvé la développée de l'ellipse. Peut-être y a-t-il une erreur dans l'énoncé; ce qui expliquerait que la question **1878**, qui ne présente pas de difficultés particulières, n'ait pas encore été résolue.

Voici comment on peut diriger le calcul pour l'abréger et le simplifier un peu. Au lieu de la parabole (II), considérons sa polaire réciproque par rapport à (E). Son enveloppe sera la polaire réciproque de l'enveloppe de (II) et, si cette dernière est la développée de (E), ce sera la kreuzcurve d'équation

$$\frac{a^6}{x^2}+\frac{b^6}{y^2}-c^4=0.$$

Cette équation étant beaucoup plus simple que celle de la développée de l'ellipse, on comprend l'avantage qu'il y a à procéder comme nous le faisons.

L'équation de la polaire réciproque de (II) par rapport à (E) est

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1+\left(\frac{\alpha x}{a^2}+\frac{\beta y}{b^2}-1\right)^2=0.$$

Mais la relation (1) permet de poser

$$\alpha=(a+b)\cos\varphi,\qquad \beta=(a+b)\sin\varphi;$$

et l'équation précédente devient

$$(4)\quad \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1+(a+b)^2\left(\frac{x\cos\varphi}{a^2}+\frac{y\sin\varphi}{b^2}-\frac{1}{a+b}\right)^2=0.$$

En la différentiant par rapport à φ, on trouve

$$\left(\frac{x\cos\varphi}{a^2}+\frac{y\sin\varphi}{b^2}-\frac{1}{a+b}\right)\left(-\frac{x\sin\varphi}{a^2}+\frac{y\cos\varphi}{b^2}\right)=0.$$

Le premier facteur donne comme enveloppe l'ellipse (E), résultat évident *a priori;* le second donne la vraie enveloppe,

qui se trouve ainsi définie par l'équation

$$\frac{x \sin\varphi}{a^2} - \frac{y \cos\varphi}{b^2} = 0$$

et l'équation (4).

De ces équations on déduit

$$(5) \quad \begin{cases} x = \dfrac{2a^2(a+b)\cos\varphi}{a^2\cos^2\varphi + b^2\sin^2\varphi + (a+b)^2}, \\ y = \dfrac{2b^2(a+b)\sin\varphi}{a^2\cos^2\varphi + b^2\sin^2\varphi + (a+b)^2}; \end{cases}$$

et ces valeurs ne satisfont pas à l'équation de la kreuzcurve. Les coordonnées d'un point de l'enveloppe, en fonction du paramètre φ, sont données par les relations (5). Pour obtenir l'équation de cette enveloppe, il faut éliminer φ entre elles; mais on n'arrive pas à une équation plus simple ni plus facile à discuter que les relations elles-mêmes.

QUESTION.

2243. *Énoncé complété* (*voir* 1915, p. 143). — Étant donné deux droites D et Δ rectangulaires, ne se rencontrant pas, et, dans un plan perpendiculaire à D, un cercle C ayant son centre O sur cette droite, on considère la surface réglée du quatrième ordre ayant pour directrices D, Δ et C (bien connue en stéréotomie comme constituant l'intrados de la voûte dite *arrière-voussure de Montpellier*).

Démontrer *géométriquement* :

1° Que la section de cette surface par tout plan perpendiculaire à D est une *conchoïde de Nicomède* de pôle O.

2° Que la section de la surface par tout plan P contenant le diamètre de C parallèle à Δ est une conique dont la projection sur le plan Π de C rencontre ce cercle en deux points fixes, réels ou imaginaires, admet pour foyer le point O et pour directrice correspondant à ce foyer la projection, sur le plan Π, de la trace du plan P sur celui mené par Δ parallèlement à Π.

M. D'OCAGNE.

Questions (depuis l'année 1842 jusqu'à 1910 inclusivement) qui restent non résolues à la fin de 1915.

62	126	266	333	383	400	424
546	554	592	593	598	604	617
643	693	703	724	729	730	731
732	772	774	791	805	812	815
820	821	848	852	859	861	880
888	891	892	893	895 *bis*	947	967
989	999	1000	1004	1007	1008	1015
1035	1042	1058	1063	1074	1078	1092
1105	1107	1108	1149	1206	1234	1236
1256	1305	1321	1361	1363	1365	1366
1390	1392	1393	1394	1402	1403	1435
1438	1439	1440	1441	1442	1443	1444
1445	1446	1447	1471	1483	1486	1490
1502	1503	1508	1510	1511	1519	1522
1523	1527	1528	1530	1564	1571	1585
1588	1596	1599	1600	1609	1614	1629
1631	1647	1650	1660	1672	1686	1687
1688	1689	1690	1691	1692	1693	1694
1695	1705	1710	1715	1721	1731	1738
1747	1751	1754	1761	1762	1763	1775
1776	1777	1779	1784	1785	1810	1811
1820	1821	1824	1825	1826	1828	1832
1837	1838	1839	1847	1850	1852	1854
1856 *bis*	1859	1864	1876	1884	1885	1886
1889	1890	1892	1908	1909	1910	1911
1914	1915	1937	1944	1950	1956	1957
1988	2003	2010	2012	2015	2038	2039
2045	2057	2065	2096	2114	2116	2141
2145	2151	2152	2156	2161		

La comparaison avec le Tableau publié précédemment (1915, p. 246) montre qu'un nombre notable de questions ont été récemment résolues, grâce aux efforts de nos lecteurs.

Nous les en remercions, et nous comptons sur leur persévérance.

[P¹1c]

ÉTUDE ÉLÉMENTAIRE SUR L'HOMOGRAPHIE PLANE DE PÉRIODE TROIS ET SUR UNE SURFACE CUBIQUE ;

Par M. Lucien GODEAUX.

Considérons, sur une surface algébrique F, une involution d'ordre n, c'est-à-dire un système algébrique, doublement infini, de groupes de n points de la surface, tels qu'un point de la surface n'appartienne, en général, qu'à un seul de ces groupes. En général, une involution appartenant à une surface algébrique possède ∞^1 points de coïncidence, c'est-à-dire ∞^1 points comptant pour plus d'une unité parmi les n points des groupes auxquels ils appartiennent respectivement. Cependant, certaines involutions peuvent ne posséder qu'un nombre fini, éventuellement nul, de points de coïncidence. Supposons que l'involution d'ordre n, donnée sur F, jouisse de cette dernière propriété. Deux problèmes se posent :

1° *Déterminer une surface normale* Φ, *image de l'involution* (c'est-à-dire dont les points correspondent birationnellement aux groupes de l'involution) *et étudier ses singularités;*

2° *Déterminer les conditions nécessaires et suffisantes pour qu'une surface algébrique soit l'image d'une involution, appartenant à une surface algébrique, ayant un nombre fini de points de coïncidence.*

Nous avons consacré à l'étude de ces problèmes

plusieurs Mémoires, parmi lesquels nous citerons les suivants :

1° *Sur les involutions douées d'un nombre fini de points unis, appartenant à une surface algébrique* (*Rendiconti R. Accad. Lincei*, 1er semestre 1914);

2° *Mémoire sur les involutions appartenant à une surface de genres un* (*Annales de l'École Normale supérieure*, 1914);

3° *Sur les involutions appartenant à une surface de genres $p_a = p_g = 0$, $P_6 = 1$* (*Bull. Soc. math. de France*, 1913);

4° *Mémoire sur les surfaces algébriques de genres zéro et de bigenre un* (*Bull. Soc. math. de France*, 1915);

5° *Sur les involutions de genres un et de seconde espèce appartenant à une surface de genres un* (*Annales de l'Université de Jassy*, 1915);

6° *Mémoire sur les surfaces algébriques doubles ayant un nombre fini de points de diramation* (*Annales de la Faculté de Toulouse*, 1914).

A ces travaux il faut ajouter des recherches de MM. Enriques et Severi qui ont d'ailleurs été le point de départ des nôtres :

F. Enriques et F. Severi, *Mémoire sur les surfaces hyperelliptiques* (*Acta mathematica*, 1909).

Dans la première de nos études citées, nous avons notamment démontré que toute involution appartenant à une surface algébrique, douée d'un nombre fini de points de coïncidence, est engendrée par un groupe de transformations birationnelles de la surface en elle-même. Sauf dans le Mémoire n° 6, nous nous sommes toujours borné à des surfaces spéciales. Nos recherches ultérieures porteront sur des surfaces quelconques.

Dans cette Note nous traiterons, à titre d'exemple, un cas très simple et bien connu. Notre surface F sera un plan et notre involution sera celle qui est engendrée par l'homographie plane de période trois. Nous étudierons la surface cubique qui représente cette involution.

1. Soient en coordonnées homogènes

$$x'_1 : x'_2 : x'_3 = x_1 : \varepsilon x_2 : \varepsilon^2 x_3,$$

ε étant une racine cubique primitive de l'unité, les équations d'une homographie plane de période trois.

Cette homographie engendre une involution I_3, d'ordre trois. Un groupe de cette involution est constituée par trois points :

$$(x_1, x_2, x_3), \quad (x_1, \varepsilon x_2, \varepsilon^2 x_3), \quad (x_1, \varepsilon^2 x_2, \varepsilon x_3).$$

L'involution I_3 possède trois points de coïncidence ; ce sont les points

$$(1, 0, 0), \quad (0, 1, 0), \quad (0, 0, 1).$$

On peut former aisément des systèmes linéaires de courbes planes composés avec I_3. Les plus simples sont formés de courbes d'ordre trois.

La cubique

$$\begin{aligned} &a_{300} x_1^3 + a_{030} x_2^3 + a_{003} x_3^3 + 3 a_{210} x_1^2 x_2 \\ &\quad + 3 a_{201} x_1^2 x_3 + 3 a_{120} x_1 x_2^2 + 3 a_{021} x_2^2 x_3 \\ &\quad + 3 a_{102} x_1 x_3^2 + 3 a_{012} x_2 x_3^2 + 6 a_{111} x_1 x_2 x_3 = 0 \end{aligned}$$

est transformée, par l'homographie, en la cubique

$$\begin{aligned} &a_{300} x_1^3 + a_{030} x_3^2 + a_{003} x_3^3 + 3 \varepsilon a_{210} x_1^2 x_2 \\ &\quad + 3 \varepsilon^2 a_{201} x_1^2 x_3 + 3 \varepsilon^2 a_{102} x_1 x_2^2 + 3 \varepsilon x_2^2 x^2 \\ &\quad + 3 \varepsilon a_{102} x_1 x_3^2 + 3 \varepsilon^2 a_{102} x_2 x_3^2 + 6 a_{111} x_1 x_2 x_3 = 0. \end{aligned}$$

Par contre, le système des cubiques planes contient

trois systèmes linéaires composés, avec I_3, ce sont :

$$\lambda_1 x_1^3 + \lambda_2 x_2^3 + \lambda_3 x_3^3 + \lambda_4 x_1 x_2 x_3 = 0; \tag{1}$$

$$\mu_1 x_1^2 x_2 + \mu_2 x_2^2 x_3 + \mu_3 x_3^2 x_1 = 0; \tag{2}$$

$$\nu_1 x_1^2 x_3 + \nu_2 x_2^2 x_1 + \nu_3 x_3^2 x_2 = 0. \tag{3}$$

Le premier seul de ces systèmes est dépourvu de points de base et est donc de degré 9.

2. *Surface cubique image de* I_3. — Rapportons projectivement les courbes

$$\lambda_1 x_1^3 + \lambda_2 x_2^3 + \lambda_3 x_3^3 + \lambda_4 x_1 x_2 x_3 = 0$$

aux plans

$$\lambda_1 X_1 + \lambda_2 X_2 + \lambda_3 X_3 + \lambda_4 X_4 = 0,$$

d'un espace linéaire à trois dimensions. Nous obtenons ainsi une surface du troisième ordre Φ, d'équation

$$X_1 X_2 X_3 = X_4^3.$$

A un point de cette surface Φ correspond un groupe de I, et inversement. On obtient donc une surface image de I_3, du troisième ordre.

3. *Étude d'un point de diramation de* Φ. — A un point de coïncidence P du plan (x_1, x_2, x_3) correspond, sur Φ, un point de diramation P′ qui est un point singulier de cette surface. Nous allons étudier la singularité de P′. Nous supposerons, pour fixer les idées, que P est le point (1, 0, 0). Alors le point P′ est le point (1, 0, 0, 0).

Considérons une droite

$$a_2 x_2 + a_3 x_3 = 0,$$

passant par P, et ses transformées

$$a_2 x_2 + \varepsilon a_3 x_3 = 0, \qquad \varepsilon a_2 x_2 + a_3 x_3 = 0,$$

au moyen de l'homographie. Ces droites diffèrent, lorsque a_2, a_3 ne sont pas nuls; elles coïncident si l'une de ces quantités est nulle. Cela signifie que si un point du plan s'approche de P dans une direction différente des directions $x_2 = 0$, $x_3 = 0$, ses conjugués dans I_3 s'approchent de P suivant deux directions différentes.

En d'autres termes, un point infiniment voisin de P n'est pas un point de coïncidence de I_3, exception faite pour les points infiniment voisins de P dans les directions $x_2 = 0$, $x_3 = 0$.

Considérons une courbe

$$(4) \qquad \lambda_2 x_2^3 + \lambda_3 x_3^3 + \lambda_4 x_1 x_2 x_3 = 0$$

du système (1) passant par P. Cette courbe possède un point double en P et ses deux branches touchent les droites $x_2 = 0$, $x_3 = 0$.

A la courbe (4) correspond sur Φ une cubique, section plane de cette surface passant par P'. Cette cubique possède, en P', un point double à tangentes distinctes. En effet, à un point Q de la section de Φ par le plan

$$\lambda_2 X_2 + \lambda_3 X_3 + \lambda_4 X_4 = 0$$

correspondent trois points de la courbe (4), Q_1, Q_2, Q_3. Lorsque le point Q s'approche de P' (sur la section plane considérée), les points Q_1, Q_2, Q_3 s'approchent de P, mais tous trois sur une même branche de la courbe (4), puisqu'ils doivent coïncider en un point infiniment voisin de P sur cette branche. A chaque branche de la courbe (4) correspond donc une branche de la section plane considérée sur Φ, en P'. Par suite, les sections planes de Φ passant par P' ayant en ce point un point double à tangentes distinctes, la surface Φ possède en P' un point double non uniplanaire.

Il y a ∞^1 courbes (1) ayant en P un point triple. Elles

ont pour équations

$$\lambda_2 x_2^3 + \lambda_3 x_3^3 = 0$$

et sont donc dégénérées en trois droites. Comme nous l'avons vu plus haut, ces trois droites sont transformées les unes en les autres par l'homographie.

A cette courbe (1) spéciale correspond, sur Φ, la section de cette surface par le plan

$$\lambda_2 X_2 + \lambda_3 X_3 = 0.$$

Cette section plane possède un point double à tangentes confondues en P', car à un point de la section infiniment voisin de P' correspondent, sur le plan (x_1, x_2, x_3), trois points infiniment voisins de P, mais situés chacun sur une des trois droites dont il vient d'être question.

On en conclut que :

En chaque point de diramation, la surface Φ possède un point double biplanaire.

Effectivement, l'étude de l'équation de la surface conduit au même résultat. En P', par exemple, Φ a un point double dont le cône tangent se décompose en les deux plans $X_2 = 0$, $X_3 = 0$.

4. La surface Φ est évidemment normale, car le système des courbes (1) est complet. En d'autres termes, il n'est pas possible de trouver une courbe de ce système, c'est-à-dire une cubique invariante pour l'homographie et n'appartenant pas au système (2), (3), qui ne puisse être représentée par l'équation (1). Nous avons par suite résolu le premier problème.

L'involution d'ordre trois engendrée par une homographie plane de période trois, peut être repré-

sentée par une surface cubique possédant trois points doubles biplanaires.

5. *Deux systèmes de cubiques gauches tracées sur* Φ. — A une courbe (2) ou (3) correspond, sur Φ, une courbe dont nous allons rechercher la nature.

Une courbe (2) rencontre une courbe (1) en neuf points formant trois groupes de I_3, par suite, la courbe A correspondant à cette courbe (2) rencontrera une section plane de Φ en trois points. Mais la courbe A ne peut être plane, sans quoi elle aurait pour transformée une courbe (1); la courbe A est donc une cubique gauche.

Une courbe (1) passant par le point (1, 0, 0) rencontre une courbe (2), en dehors du domaine de ce point, en six points formant deux groupes de I_3; par conséquent, un plan passant par le point (1, 0, 0, 0) rencontre la courbe A, en dehors de ce point, en deux points. On en conclut que la courbe A passe par les trois points doubles de Φ.

Une courbe (1) ayant un point triple en (1, 0, 0), c'est-à-dire décomposée en trois droites, rencontre une courbe (2) en deux groupes de I_3 en dehors du domaine de ce point. Le plan

$$\lambda_2 X_2 + \lambda_3 X_3 = 0$$

rencontre donc A en deux points en dehors de (1, 0, 0, 0) et par suite la courbe A ne touche pas la droite

$$X_2 = X_3 = 0.$$

On pourrait raisonner de même sur les courbes correspondant, sur Φ_1 aux courbes (3). On voit donc que :

Il existe, sur la surface Φ, *deux réseaux de*

cubiques gauches passant par les points doubles de la surface, mais n'y touchant pas la tangente principale.

6. Il convient d'étudier de plus près ces réseaux de cubiques gauches. Nous étudierons celui qui correspond au réseau des courbes (2). Suivant l'usage adopté en Géométrie algébrique, nous indiquerons ce réseau par $|A|$, et l'une quelconque de ses courbes génériques par A.

Les courbes

$$(2) \qquad \mu_1 x_1^2 x_2 + \mu_2 x_2^2 x_3 + \mu_3 x_3^2 x_1 = 0$$

passent par les sommets du triangle fondamental et touchent la droite $x_2 = 0$ en $(1, 0, 0)$, la droite $x_3 = 0$ en $(0, 1, 0)$ et la droite $x_1 = 0$ en $(0, 0, 1)$.

La courbe A qui correspond à la courbe (2) est située sur les cônes

$$(\text{I}) \qquad \mu_1 X_4^2 + \mu_2 X_2 X_3 + \mu_3 X_3 X_4 = 0,$$

$$(\text{II}) \qquad \mu_1 X_1 X_4 + \mu_2 X_4^2 + \mu_3 X_1 X_3 = 0,$$

$$(\text{III}) \qquad \mu_1 X_1 X_2 + \mu_2 X_2 X_4 + \mu_3 X_4^2 = 0,$$

ainsi qu'on le voit par un calcul très simple. Ce sont les trois cônes projetant la courbe respectivement des trois points doubles de la surface Φ.

Le cône (I), de sommet $(1, 0, 0, 0)$, touche le plan $X_3 = 0$ le long de la droite $X_3 = X_4 = 0$, tandis que le cône (II) ne touche pas ce plan. On en conclut que la cubique gauche A touche le plan $X_3 = 0$ en $(0, 1, 0, 0)$. De même, A touche le plan $X_1 = 0$ en $(0, 0, 1, 0)$ et $X_2 = 0$ en $(1, 0, 0, 0)$. En d'autres termes :

Dans les domaines des points doubles de la surface Φ, les cubiques A sont tracées sur une nappe de

la surface; en (1, 0, 0, 0) *sur la nappe tangente à* $X_2 = 0$, *en* (0, 1, 0, 0) *sur la nappe tangente à* $X_3 = 0$, *en* (0, 0, 1, 0) *sur la nappe tangente à* $X_1 = 0$.

Remarquons enfin que le réseau $|A|$ est de degré un. En effet, deux cubiques (2) ont en commun, en dehors des sommets du triangle fondamental, trois points formant un groupe de I_3. Les deux courbes A qui correspondent aux courbes considérées n'ont donc qu'un point commun, variable.

7. A une cubique plane du plan (x_1, x_2, x_3), non transformée en elle-même par l'homographie, correspond sur Φ une courbe elliptique d'ordre 9, découpée sur cette surface par une surface cubique. Les coefficients de l'équation de cette dernière surface sont d'ailleurs des fonctions des coefficients de l'équation de la courbe considérée.

Pour le faire voir, considérons la cubique

$$\varphi_1 = \Sigma a_{ikl} x_1^i x_2^k x_3^l = 0$$
$$(i + k + l = 3).$$

L'homographie la transforme successivement en les cubiques :

$$\varphi_2 = \Sigma \varepsilon^{k+2l} a_{ikl} x_1^i x_2^k x_3^l = 0,$$
$$\varphi_3 = \Sigma \varepsilon^{2k+l} a_{ikl} x_1^i x_2^k x_3^l = 0.$$

La courbe

$$(5) \qquad \varphi_1 . \varphi_2 . \varphi_3 = 0$$

correspond donc, sur Φ, à une courbe C en correspondance birationnelle avec chacune des cubiques $\varphi_1 = 0$, $\varphi_2 = 0$, $\varphi_3 = 0$. En effet, à un point de C correspondent trois points du plan (x_1, x_2, x_3) situés sur chacune des trois cubiques considérées. C est par suite elliptique.

La courbe (5) rencontre une courbe (1) en neuf ternes de I_3, donc C est bien d'ordre 9.

Remarquons qu'il existe, sur $\varphi_1 = 0$, par exemple, neuf couples de points auxquels correspondent les mêmes points de C. On en conclut que la courbe C possède neuf points doubles variables en des points simples de Φ. (Les couples de points dont il est question ici forment les dix-huit points d'intersection de $\varphi_1 = 0$ avec $\varphi_2 = 0$ et $\varphi_3 = 0$).

Faisons varier la courbe $\varphi_1 = 0$ d'une manière continue dans son plan jusqu'à ce que son équation devienne

$$(1) \qquad \lambda_1 x_1^3 + \lambda_2 x_2^3 + \lambda_3 x_3^3 + \lambda_4 x_1 x_2 x_3 = 0.$$

La courbe C correspondante varie sur Φ et se réduit à la section de Φ par le plan

$$\lambda_1 X_1 + \lambda_2 X_2 + \lambda_3 X_3 + \lambda_4 X_4 = 0$$

comptée trois fois, c'est-à-dire à la section de Φ par la surface cubique

$$(\lambda_1 X_1 + \lambda_2 X_2 + \lambda_3 X_3 + \lambda_4 X_4)^3 = 0.$$

On en conclut que les courbes C sont découpées, sur Φ, par des surfaces cubiques.

Faisons maintenant coïncider la courbe $\varphi_1 = 0$ avec la courbe

$$(2) \qquad \mu_1 x_1^2 x_2 + \mu_2 x_2^2 x_3 + \mu_3 x_3^2 x_1 = 0.$$

La courbe (5) se réduit à la courbe $\varphi_1^3 = 0$ et la courbe C à une courbe A comptée trois fois. La surface cubique découpant cette courbe A sur Φ doit donc osculer cette surface en chacun de ses points de ren-

contre. Cette surface cubique a pour équation

$$\begin{aligned}\psi(X_1, X_2, X_3, X_4) \equiv{} & \mu_1^3 X_1^2 X_2 + \mu_2^3 X_2^2 X_3 + \mu_3^3 X_2^3 X_1 \\ & + 3\mu_1^2 \mu_3 X_4^2 X_1 + 3\mu_2^2 \mu_1 X_4^2 X_2 + 3\mu_3^2 \mu_2 X_4^2 X_3 \\ & + 6\mu_1 \mu_2 \mu_3 X_4^2 + 3\mu_2^2 \mu_3 X_2 X_3 X_4 \\ & \qquad + 3\mu_3^2 \mu_1 X_3 X_1 X_4 + 3\mu_1^2 \mu_3 X_1 X_2 X_4 = 0.\end{aligned}$$

Remarquons que, dans le domaine du point (1, 0, 0, 0) par exemple, la surface $\psi = 0$ touche simplement la nappe de la surface Φ tangente à $X_2 = 0$.

8. Considérons la surface F, d'ordre 9, située dans l'espace à quatre dimensions, dont les équations sont :

$$X_1 X_2 X_3 = X_4^3, \qquad X_5^3 = \psi(X_1, X_2, X_3, X_4).$$

Entre la surface Φ et la surface F, nous avons une correspondance (1, 3). Quels sont les points de Φ de diramation pour cette correspondance, c'est-à-dire les points de Φ auxquels correspondent trois points coïncidents de F.

Une première condition que ces points doivent vérifier, c'est évidemment $X_5 = 0$, c'est-à-dire

$$\psi(X_1, X_2, X_3, X_4) = 0.$$

Mais nous avons vu que cette surface oscullait Φ en chaque point de rencontre, sauf dans le domaine des points (1, 0, 0, 0), (0, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 0), où elle touche une des nappes de la surface. Il n'y aura donc diramation qu'en ces points de contact simple.

On voit donc qu'il y a trois points de diramation et que la surface F est par suite irréductible.

Nous démontrerons actuellement que la surface F est rationnelle.

Posons

$$\frac{X_1}{x_1^3} = \frac{X_2}{x_2^3} = \frac{X_3}{x_3^3} = \frac{X_4}{x_1 x_2 x_3} = \frac{X_5}{\mu_1 x_1^2 x_2 + \mu_2 x_2^2 x_3 + \mu_3 x_3^2 x_1} = \rho.$$

Ces formules font correspondre à un point du plan (x_1, x_2, x_3) un point de F. Inversement, à un point de F correspond un point du plan (x_1, x_2, x_3).

En effet, on a successivement

$$\mu_1 x_1^2 x_2 + \mu_2 x_2^2 x_3 + \mu_3 x_3^2 x_1 = \frac{1}{\rho} X_5,$$

$$\mu_1 x_2^2 x_3 X_1 + \mu_2 x_3^2 x_1 X_2 + \mu_3 x_1^2 x_2 X_3 = \frac{1}{\rho} X_4 X_5,$$

$$\mu_1 x_3^2 x_1 X_1 X_2 + \mu_2 x_1^2 x_2 X_2 X_3 + \mu_3 x_2^2 x_3 X_3 X_1 = \frac{1}{\rho} X_4^2 X_5.$$

On en déduit, en posant

$$\Delta = \begin{vmatrix} \mu_1 & \mu_2 & \mu_3 \\ \mu_3 X_3 & \mu_1 X_1 & \mu_2 X_2 \\ \mu_2 X_2 X_3 & \mu_3 X_1 X_3 & \mu_1 X_1 X_2 \end{vmatrix},$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & \mu_2 & \mu_3 \\ X_4 & \mu_1 X_1 & \mu_1 X_2 \\ X_4^2 & \mu_3 X_1 X_3 & \mu_1 X_1 X_2 \end{vmatrix},$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} \mu_1 & 1 & \mu_3 \\ \mu_3 X_3 & X_4 & \mu_2 X_2 \\ \mu_2 X_2 X_3 & X_4^2 & \mu_1 X_1 X_2 \end{vmatrix},$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} \mu_1 & \mu_2 & 1 \\ \mu_3 X_3 & \mu_1 X_1 & X_4 \\ \mu_2 X_2 X_3 & \mu_3 X_1 X_3 & X_4^2 \end{vmatrix},$$

$$x_1^2 x_2 = \frac{1}{\rho} \frac{X_5 \Delta_1}{\Delta}, \qquad x_2^2 x_3 = \frac{1}{\rho} \frac{X_5 \Delta_2}{\Delta}, \qquad x_3^2 x_1 = \frac{1}{\rho} \frac{X_5 \Delta_3}{\Delta}.$$

Mais on a

$$x_1^3 = \frac{1}{\rho} X_1, \qquad x_2^3 = \frac{1}{\rho} X_2, \qquad x_3^3 = \frac{1}{\rho} X_3;$$

par suite,

$$\frac{x_1}{x_2} = \frac{X_1 \Delta}{X_5 \Delta_1}, \qquad \frac{x_2}{x_3} = \frac{X_2 \Delta}{X_5 \Delta_2}, \qquad \frac{x_3}{x_1} = \frac{X_3 \Delta}{X_5 \Delta_3}.$$

On en déduit, par exemple,

$$\frac{x_1}{X_1 X_2 \Delta^2} = \frac{x_2}{X_2 X_3 \Delta\Delta_1} = \frac{x_3}{X_3^2 \Delta_1 \Delta_2}.$$

On voit qu'entre la surface F et le plan (x_1, x_2, x_3) il existe une correspondance birationnelle. La surface F est donc bien rationnelle.

La transformation

$$\rho X'_1 = X_1, \qquad \rho X'_2 = X_2, \qquad \rho X'_3 = X_3,$$
$$\rho X'_4 = X_4, \qquad \rho X'_5 = \varepsilon X_5,$$

qui engendre sur F l'involution dont Φ est l'image, a pour correspondante, dans le plan (x_1, x_2, x_3),

$$x'_1 = x'_2 : x'_3 = x_1 : \varepsilon x_2 : \varepsilon^2 x_3.$$

9. Pour résoudre le second problème proposé, remarquons qu'une surface cubique, possédant trois points doubles biplanaires ordinaires, ne peut pas nécessairement être représentée par l'équation

$$X_1 X_2 X_3 = X_4^3,$$

c'est-à-dire que les trois couples de plans tangents à la surface aux trois points biplanaires ne sont pas nécessairement les faces d'un trièdre; mais une surface jouissant de cette propriété peut au contraire toujours être représentée par une telle équation. Par conséquent :

La condition nécessaire et suffisante pour qu'une surface cubique soit l'image d'une involution plane d'ordre trois, engendrée par une homographie de période trois à trois points unis, est qu'elle possède trois points biplanaires ordinaires, les plans tangents à la surface en ces points étant les faces d'un même trièdre.

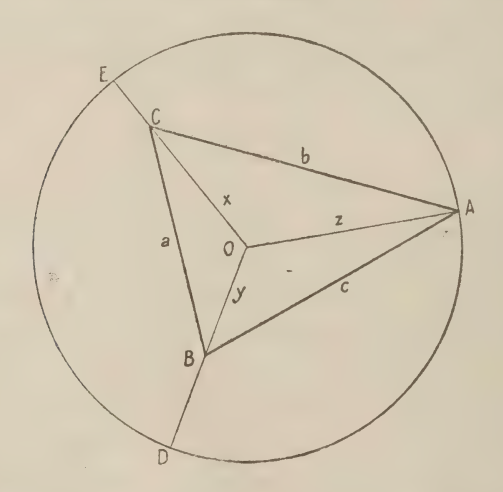
[I19a]

DISTANCES, EN NOMBRES ENTIERS, DE TROIS POINTS ET DE LEUR CENTRE ISOGONE A 120°;

Par M. A. GÉRARDIN.

Le problème suivant a été déjà traité depuis longtemps, mais je suis parvenu à une solution nouvelle et inédite qui pourra intéresser nos lecteurs : c'est ce qui m'a déterminé à en présenter l'étude.

Supposons un cercle de centre O, *et appelons* A, D, E, *les sommets du triangle équilatéral inscrit.*



Trouver des points B *sur* OD *et* C *sur* OE, *tels que les six lignes* a, b, c, x, y, z *soient représentées par des nombres entiers, et donner des formules générales du problème.* CE *et* BD *sont aussi entiers.*

Puisque les angles en O ont tous 120°, ce problème prend la forme suivante :

$$x^2 + xy + y^2 = a^2$$
$$x^2 + xz + z^2 = b^2$$
$$y^2 + yz + z^2 = c^2.$$

Tel est le système à résoudre, mais, avant de le traiter, rappelons quelques phases du problème.

Résumé historique et bibliographique.

Le n° 3, Vol. III de *The Mathematician*, probl. CXLVI, p. 164-165 de juillet 1848 [Ed. Rutherford et Fenwick, 1856, chez Spon, à Londres], a donné la solution du problème suivant de Weddle : « If the squares of the sides of a triangle be in arithmetical progression, the lines drawn from the angles to a point within the triangle so as to make equal angles with each other, are in arithmetical progression. »

Les n°s 4 et 5, Vol. I, janvier et juillet 1880 de *The Mathematical Visitor* (fondé en 1879 à Washington par notre confrère M. Artemas Martin), ont publié d'intéressantes notes sur le problème 123 du Dr David S. Hart, M. A., Stonington, New London County, Connecticut, posé dans le n° 3 (de 1879), Senior Department : « To find three whole numbers such that the sum of the squares of any two of them increased by the product of the same two shall be a rational square. »

Ce journal a publié, p. 105-106, 129-130, les solutions :

N° 1 du Rév. U. Jesse Knisely, Ph. D., Newcomerstown, Tuscarawas County, Ohio ;

N° 2 d'Artemas Martin, M. A.;
N° 3 de l'auteur du problème, Hart;
N° 4 de Reuben Davis, réponse dont je n'ai pas connaissance.

Voici le résumé des trois premiers articles :

N° 1. On a successivement (après rectification), suivant les calculs et la numérotation de Knisely,

$$(4)\qquad 4(x^2+xy+y^2)(x^2+xz+z^2)=4a^2b^2,$$
$$(5)\qquad 2x^2+xy+xz-yz=a^2+b^2-c^2.$$

Retrancher le carré de (5) de l'expression (4); d'où

$$(6)\qquad xy+xz+yz=\frac{1}{3}\,\mathrm{A},$$

en posant

$$(10)\qquad 12a^2b^2-3(a^2+b^2-c^2)^2=\mathrm{A}^2.$$

On aura de même

$$(7)\qquad x^2+y^2+z^2=\frac{1}{2}(a^2+b^2+c^2)-\frac{1}{6}\,\mathrm{A}.$$

En posant

$$(11)\qquad 2(a^2+b^2+c^2)\pm 2\mathrm{A}=\mathrm{B}^2,$$

on en déduit

$$\mathrm{B}x=a^2+b^2-c^2\pm\frac{1}{3}\,\mathrm{A},$$
$$\mathrm{B}y=a^2+c^2-b^2\pm\frac{1}{3}\,\mathrm{A},$$
$$\mathrm{B}z=b^2+c^2-a^2\pm\frac{1}{3}\,\mathrm{A}.$$

L'auteur fait ensuite les transformations

$$a=(1-n)b,\qquad c=(1+n)b,\qquad 1-4n^2=(1-pn)^2;$$

d'où

$$n = \frac{2p}{p^2+4}, \qquad \frac{A}{b^2} = \frac{3p^2-12}{p^2+4}.$$

Il est enfin conduit à

$$3p^2+16 = (4+qp)^2 \qquad \text{ou} \qquad p = \frac{8q}{3-q^2}.$$

Pour avoir des valeurs *positives*, il faut $n < \frac{1}{4}$; avec $q = -2$, $p = 16$, on trouve la solution

$$x = 195, \qquad y = 264, \qquad z = 325.$$

Je reproche à ce procédé d'être un peu ardu et aussi de nécessiter des calculs de limites, pour avoir des solutions entières et positives. J'ajoute qu'il est facile d'en tirer des solutions générales; mais si une simplification, qui me semble bien improbable, ne se présente pas, l'identité finale nous donnera pour chacune de nos six inconnues initiales une fonction homogène compliquée du *huitième degré* entre deux variables auxiliaires. On calculera seulement ces valeurs le jour où l'on écrira la solution *définitive* et *complète* de cette question.

N° 2. M. Artemas Martin écrit

$$x^2+xy+y^2 = \left(\frac{p}{q}x - y\right)^2 \qquad \text{d'où} \qquad \frac{x}{y} = \frac{q^2+2pq}{p^2-q^2},$$

mais il particularise immédiatement en posant

$$p = 2, \qquad q = 1, \qquad x = 5m, \qquad y = 3m, \qquad z = wm,$$

d'où l'*équation double*

$$25+5w+w^2 = D^2, \qquad 9+3w+w^2 = E^2.$$

L'auteur pose

$$w = \frac{5(2n+1)}{n^2-1},$$

d'où

$$9n^4 + 30n^3 + 97n^2 + 70n + 19 = F^2$$

avec

$$F = 3n^2 + 5n + \frac{1}{2}a$$

et

$$a = 19, \qquad b = 0, \qquad n = \frac{19}{6}, \qquad m = 65,$$

il obtient

$$x = 325, \qquad y = 195, \qquad z = 264;$$

mais il ne faudrait point particulariser, si l'on voulait obtenir des solutions générales.

N° 3. Hart est amené, avec

$$x = m^2 - n^2, \qquad y = 2mn + n^2, \qquad z = \left(\frac{2pq + q^2}{p^2 - q^2}\right)x,$$

à écrire

$$y^2 + \left(\frac{2pq + q^2}{p^2 - q^2}\right)xy + \left(\frac{2pq + q^2}{p^2 - q^2}\right)^2 x^2 = G^2.$$

Après développement par rapport à p, il pose

$$G = yp^2 + xpq + \frac{q^2}{2y}(3x^2 + xy - 2y^2),$$

d'où

$$p = -\frac{3x + 5y}{4y}.$$

Posant

$$p = t - \frac{3x + 5y}{4y}q$$

il écrit maintenant

$$G = yt^2 - \frac{1}{2}(x + 5y)qt - \frac{q^2}{16y}(21x^2 + 18xy + 9y^2),$$

d'où il tire

$$p = 9x^3 + 13x^2y + 27xy^2 + 15y^3$$
$$q = 4y(7x^2 + 6xy + 3y^2).$$

L'auteur termine par une analyse classique, et donne trois solutions dont la dernière est 264, 440, 325.

Ces valeurs générales de p et q sont intéressantes, mais nous ferons encore un reproche à cette méthode. On voit que z sera une fonction du septième degré en x et y, c'est-à-dire que l'identité finale donnera pour chacune des six inconnues initiales une fonction homogène du *quatorzième degré*.

Dans les « Mathematical Questions and Solutions, from the *Educational Times*... », on trouve la solution (new series, Vol. XI, 1907, p. 25-26) de la question **7464** de M. G. Heppel, M. A.

« Find positive integral solutions, as small as possible of the equations

$$x^2+xy+y^2=w^2, \quad y^2+yz+z^2=v^2, \quad z^2+zx+x^2=u^2.$$

[The proposer has not as yet found any smaller numbers than

$$\begin{array}{lll} x=27\,265, & y=13\,464, & z=39\,360, \\ w=35\,941, & v=47\,544, & u=58\,015.] \end{array}$$

M. R.-F. Davis, M. A., résout

$$U^2+UV+V^2=H^2$$

en entiers positifs, en posant

$$U=p^2-2p-3, \quad V=4p,$$

d'où, avec p et $q>3$,

$$x=q(p^2-2p-3), \quad y=4pq, \quad z=p(q^2-2q-3).$$

Il reste à rendre carrée l'expression

$$pq(pq-3)[p^2+pq+q^2-6(p+q)+3]+9(p+q)^2.$$

Exemple :

$$p=\frac{23}{7}, \quad q=\frac{29}{7};$$

d'où

$$x = 435, \qquad y = 4669, \qquad z = 1656,$$
$$w = 4901, \qquad v = 5681, \qquad u = 1911.$$

M. le lieutenant-colonel R. E., Allan Cunningham, de Londres, indique dans une Note insérée à la suite de cette réponse, que L. Euler (*Comment. Arith. Coll.*, Vol. II, p. 414-417) a résolu une équation similaire.

M. Cunningham ajoute la solution suivante :

$$x = 960, \qquad y = -1064, \qquad z = 665,$$
$$v = 931, \qquad u = 1415, \qquad w = 1016$$

et dit qu'il est difficile de trouver par cette méthode des nombres tous positifs.

Il faut voir aussi, en général, pour l'étude des *triples équations* et des *doubles équations* la traduction de l'*Inventum Novum* de J. de Billy (*Œuvres de Fermat*, t. III).

Pour terminer ce bref historique, on peut dire que, si la forme du problème admettait un nombre négatif, on en obtiendrait immédiatement de nombreuses identités, l'emploi d'une méthode quelconque fournissant immédiatement des solutions.

Ce problème que l'on peut classer parmi les questions ardues d'analyse indéterminée en *entiers positifs* mérite d'être approfondi, et nous espérons que de nouveaux chercheurs feront bientôt connaître des solutions générales inédites et compléteront peut-être cette bibliographie condensée.

*
* *

Je note d'abord certaines remarques : si nous connaissons une solution

$$\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2 = A^2 \tag{1}$$

particulière ou générale, nous aurons aussi

$$(\alpha+\beta)^2-\alpha(\alpha+\beta)+\alpha^2=A^2$$
$$(\alpha+\beta)^2-\beta(\alpha+\beta)+\beta^2=B^2.$$

Les nombres α et β étant connus, le problème se ramène à la simple résolution en positifs, entiers ou fractionnaires, de l'*équation double*

$$(2)\qquad x^2+\alpha x+\alpha^2=B^2,$$
$$(3)\qquad x^2+\beta x+\beta^2=C^2.$$

Nous connaissons plusieurs procédés simples :

I. En posant
$$B=x+u,$$

nous arrivons à l'équation

$$u^4-2\beta u^3+(4\beta^2+\alpha\beta-2\alpha^2)u^2$$
$$+(4\alpha\beta-4\alpha\beta^2)u+(\alpha^4-\alpha^3\beta+\alpha^2\beta^2)=D^2.$$

Le coefficient seul de u^4 étant carré, je pose

$$D=u^2-\beta u+\frac{1}{2}(3\beta^2+\alpha\beta-2\alpha^2)$$

et l'on retrouve ainsi la solution de Hart.

II. On peut écrire aussi

$$D=u^2-\beta u+k$$

et l'on obtient alors une équation de condition, où l'on doit prendre alternativement pour α et β leurs valeurs générales f^2-g^2 et g^2+2fg :

$$(3\beta^2+\alpha\beta-2\alpha^2-2k)u^2+2\beta(\alpha^2-2\alpha\beta+k)u$$
$$+[\alpha^2(\alpha^2-\alpha\beta+\beta^2)-k^2]=0.$$

En annulant le coefficient de u^2, on retrouve le cas

précédent ; en posant

$$k = 2\alpha\beta - \alpha^2,$$

on trouve

$$u = \alpha, \qquad D = \alpha\beta, \qquad x = 0.$$

Enfin, il faut rendre carré le déterminant de cette équation, où k peut être fractionnaire. On sait qu'*une* seule solution initiale suffit pour en obtenir une infinité d'autres, et cette solution est toujours facile à obtenir, même *mécaniquement* et *entière*, par mes procédés.

III. En posant

$$B = \alpha - \frac{p}{q} x,$$

on obtient

$$x = \alpha \frac{q^2 + 2pq}{p^2 - q^2}$$

et alors (3) s'écrit

$$(4) \quad \beta^2(p^2 - q^2)^2 + \alpha\beta(p^2 - q^2)(q^2 + 2pq) + \alpha^2(q^2 + 2pq)^2 = D^2.$$

Cette équation de condition (4) étant de la forme

$$U^2 + 3V^2 = W^2,$$

on pourrait donc aussi l'étudier en posant

$$V = 2rs, \qquad U = r^2 - 3s^2, \qquad W = r^2 + 3s^2.$$

IV. L'étude des *équations doubles* est intéressante à faire, d'abord par les procédés classiques, et ensuite par des recherches nouvelles.

J'ai remarqué, en commençant cet article, que

$$x = -(\alpha + \beta)$$

nous donne une solution du système (2), (3); je

poserai donc en général

$$x = t - (\alpha + \beta),$$

et il suffira que

$$t > \alpha + \beta,$$

pour avoir des solutions *positives*.

J'obtiens alors une équation de condition de la forme

(5) $$t^4 - Mt^3 + Nt^2 - MA^2 t + A^4 = D^2$$

avec

$$M = 3(\alpha + \beta), \qquad \alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2 = A^2,$$
$$N = 2A^2 + 2\alpha^2 + 5\alpha\beta + 2\beta^2.$$

Cette forme (5) est la plus intéressante, car elle nous mène à trois cas subsidiaires :

1° $$D = t^2 - \frac{1}{2}Mt + m,$$

2° $$D = t^2 + st + A^2,$$

3° $$D = A^2 - \frac{1}{2}Mt + nt^2,$$

que je vais étudier successivement.

1° En posant

$$m = A^2 - \frac{1}{8}(\alpha - \beta)^2,$$

j'en tire

$$x = -\frac{3\alpha^2 + 10\alpha\beta + 3\beta^2}{8(\alpha + \beta)} = -\frac{(3\alpha + \beta)(\alpha + 3\beta)}{8(\alpha + \beta)}$$

qui nous conduit, *avec des solutions négatives*, à des identités du *quatrième degré*, puisque

$$\alpha = f^2 - g^2, \qquad \beta = g^2 + 2fg.$$

Exemple :

$$x = 80, \qquad y = 48, \qquad z = -63.$$

2° Nous avons alors

$$(2s + 3\alpha + 3\beta)t^2 + [s^2 - (2\alpha^2 + 5\alpha\beta + 2\beta^2)]t + A^2(2s + 3\alpha + 3\beta) = 0.$$

En écrivant que son déterminant est un carré parfait, on retrouve soit le cas général d'un triangle rectangle, soit une nouvelle équation de la forme

$$s^4 + es^3 + fs^2 + gs + l = R^2$$

que l'on sait résoudre.

Voici la solution cherchée :

On pose

$$n = 1 - \frac{(\alpha - \beta)^2}{8A^2},$$

d'où

$$x = (\alpha + \beta)\frac{8A^2 + (\alpha - \beta)^2}{16A^2 - (\alpha - \beta)^2} = \frac{(\alpha + \beta)(3\alpha^2 + 2\alpha\beta + 3\beta^2)}{(5\alpha^2 + 6\alpha\beta + 5\beta^2)}.$$

Pour que α soit positif, il suffit d'avoir $f > g$; x est évidemment positif, et l'on trouve ainsi :

$$x = (f^2 - g^2)(5f^4 + 12f^3g + 16f^2g^2 + 8fg^3 + 4g^4),$$
$$y = (g^2 + 2fg)(5f^4 + 12f^3g + 16f^2g^2 + 8fg^3 + 4g^4),$$
$$z = (f^2 + 2fg)(3f^4 + 4f^3g + 8f^2g^2 + 8fg^3 + 4g^4),$$
$$a = (f^2 + fg + g^2)(5f^4 + 12f^3g + 16f^2g^2 + 8fg^3 + 4g^4).$$

Les valeurs générales de b et c se calculent facilement :

$$b = 7f^6 + 19f^5g + 23f^4g^2 + 16f^3g^3 + 8f^2g^4 + 4fg^5 + 4g^6,$$
$$c = 3f^6 + 15f^5g + 43f^4g^2 + 56f^3g^3 + 48f^2g^4 + 20fg^5 + 4g^6.$$

et l'on voit, en général, que l'on aura

$$b + c = 2a.$$

Les nombres b, a, c, sont donc en progression arithmétique, et ceci n'a pas lieu pour x, y, z.

Voici quelques solutions numériques; il faut tou-

jours prendre α et β premiers entre eux, sinon on retrouve des nombres déjà vus ; de même, il sera facile de généraliser la remarque suivante : $f=5$ et $g=2$ donnent la même solution que $f=3$ et $g=1$.

$f=2$	$g=1$	$x=$ 195	$y=$ 325	$z=$ 264
3	1	7208	6307	6765
3	2	9425	30160	21063
4	3	12383	58377	38760

On ne peut prendre $g<0$, car il y aurait un nombre négatif ; de plus, avec $f>g$, et f, g fractionnaires, on retrouve les mêmes solutions.

On aurait pu, au lieu de poser

$$x=t-(\alpha+\beta),$$

effectuer immédiatement le produit (2) (3) ; on aurait ainsi les identités suivantes, obtenues par un autre procédé.

Ayant une solution particulière ou générale

$$x=\alpha,\qquad y=\beta,\qquad z=\gamma$$

nous aurons aussi

$$x=\alpha\beta,\qquad y=\beta\gamma,\qquad z=\gamma\alpha.$$

Voici donc de nouvelles identités, provenant de a solution générale précédente ; on ne peut pas réitérer ce procédé.

Les nouvelles valeurs générales de a, b, c sont dans l'ordre

$$b\beta,\qquad c\alpha,\qquad a\gamma;$$

on aura ainsi

$$x=(f^2-g^2)(g^2+2fg)(5f^4+12f^3g+16f^2g^2+8fg^3+4g^4),$$
$$y=(f^2-g^2)(f^2+2fg)(3f^4+4f^3g+8f^2g^2+8fg^3+4g^4),$$
$$z=(f^2+2fg)(g^2+2fg)(3f^4+4f^3g+7f^2g^2+8fg^3+4g^4).$$

Application. $f=2$, $g=1$; triangle 264, 325, 440.

Ces formules donnent de nouvelles solutions du problème géométrique posé et permettent de généraliser la question, au point de vue analyse indéterminée. Il sera maintenant facile de chercher d'autres identités.

Il sera intéressant de voir si d'autres éléments de ces curieux triangles sont entiers, ou s'ils ont certaines propriétés spéciales.

J'ai aussi trouvé des identités pour un problème analogue qui se ramène à l'étude en nombres entiers du système

$$x^2-xy+y^2=a^2,$$
$$x^2-xz+z^2=b^2,$$
$$y^2-yz+z^2=c^2.$$

[O[1]2e]

CONSTRUCTION DU CENTRE DE COURBURE DE L'HYPERBOLISME ET DE L'AFFINE D'UNE COURBE DONNÉE;

Par M. F. BALITRAND.

Soient x et y les coordonnées d'un point m d'une courbe (m) et X, Y celles d'un point M d'une courbe (M). Si ces dernières sont liées aux précédentes par les formules

$$(1) \qquad x=\mathrm{X}, \qquad y=\frac{\mathrm{XY}}{a},$$

la courbe (M) est dite l'*hyperbolisme* de la courbe (m) [1].

---

[1] Au sujet de la définition et des propriétés de l'hyperbolisme et de l'affine d'une courbe se reporter à un article de M. Goormaghtigh (*Nouvelles Annales*, 1915, p. 404 et 407). Consulter aussi le *Traité des courbes spéciales remarquables* de M. Gomès Teixeira (t. I, p. 95, 99 et *passim*).

Nous nous proposons de construire géométriquement le cercle osculateur de (M) en M connaissant celui de (m) en m.

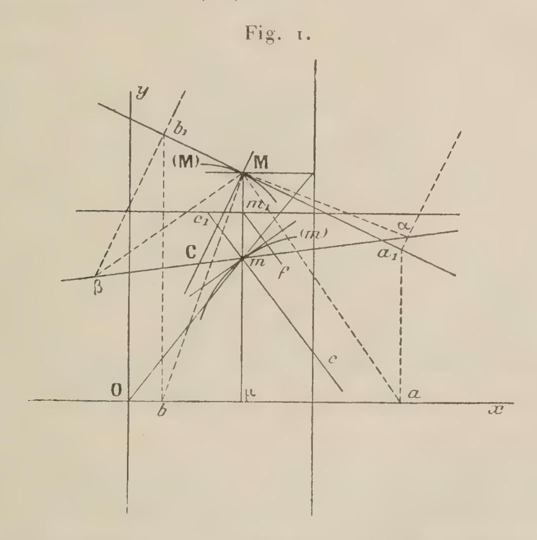
M. Goormaghtigh a donné dans les *Nouvelles Annales* une solution de ce problème fondée sur la considération des courbes intégrales ; celle que nous allons indiquer est plus directe.

La parabole qui a pour équation

$$x^2 - \alpha x - \beta y - \gamma = 0 \tag{2}$$

a son axe parallèle à Oy et dépend de trois paramètres, α, β, γ dont on peut disposer pour qu'elle passe en m et y oscule la courbe (m).

Fig. 1.



En lui appliquant la formule (1), on la transforme en une hyperbole qui a pour équation

$$x^2 - \frac{\beta x y}{a} - \alpha x - \gamma = 0. \tag{3}$$

Celle-ci passe en M et y oscule (M). Le problème

revient donc à construire son centre de courbure C en ce point.

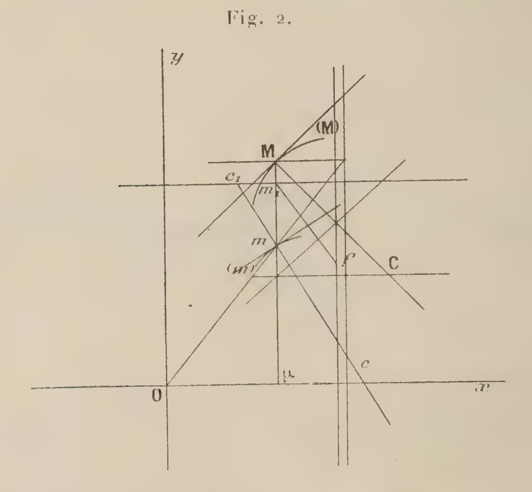
Or elle admet Oy comme asymptote et elle coupe Ox aux mêmes points que la parabole (2). Pour la déterminer, il suffit donc de connaître ces points.

Si l'on désigne par c le centre de courbure de (m) en m, et si l'on prolonge cm d'une longueur

$$mc_1 = \frac{cm}{2},$$

on obtient, d'après un théorème connu, un point de la directrice de la parabole (2) et en menant de c_1 une

Fig. 2.



perpendiculaire sur Oy on a cette directrice elle-même. Dès lors, la construction du foyer f est immédiate, car il suffit de prendre le symétrique, par rapport à la tangente en m, du point m_1 où mM coupe la directrice. En traçant ensuite, avec un rayon égal à la distance de la directrice à l'axe Ox, un cercle de centre f, on obtient les points a et b communs à Ox et à la parabole (2). Ces points appartiennent aussi à

l'hyperbole (3), qui se trouve ainsi déterminée d'une façon surabondante; car on en connaît le point M et la tangente en ce point, une asymptote, Oy, et deux points a et b.

La construction de son centre de courbure C en M est dès lors un problème connu, qui a reçu plusieurs solutions, et pour lequel nous indiquerons la suivante :

Les parallèles à Oy, *menées par* a *et* b, *rencontrent la tangente en* M *en* a_1 *et* b_1; *les parallèles à la normale en* M, *menées par ces points*, *rencontrent respectivement en* α *et* β *les perpendiculaires élevées en* M *à* Mb *et* Ma; *la droite* $\alpha\beta$ *détache sur la normale en* M *un segment égal au diamètre du cercle osculateur en ce point.*

En résumé, on a, pour déterminer le centre de courbure de l'hyperbolisme d'une courbe, la construction suivante, qui est assez longue, mais qui s'effectue entièrement avec la règle et le compas :

On prolonge le rayon de courbure cm *de* (m) *d'une longueur* $mc_1 = \frac{mc}{2}$ *et l'on mène par* c_1 *une parallèle à* Ox. *Soient* m_1 *et* μ *les points où la droite* mM *coupe cette parallèle et* Ox. *Du point* f, *symétrique de* m_1 *par rapport à la tangente en* m, *on décrit, avec* $m_1\mu$ *pour rayon, un cercle qui rencontre* Ox *en* a *et* b. *Les parallèles à* Oy, *menées par ces points, coupent la tangente en* M *en* a_1 *et* b_1; *les perpendiculaires à la tangente élevées en ces points rencontrent en* α *et* β *celles menées à* Mb *et* Ma *au point* M; *la droite* $\alpha\beta$ *passe par l'extrémité du diamètre du cercle osculateur en* M.

Pour l'affine d'une courbe donnée, la construction est analogue, mais notablement plus simple. Les for-

mules de transformation étant

$$x = X, \qquad y = kY \qquad (k = \text{const.}),$$

la parabole (2) a pour transformée une autre parabole

$$(4) \qquad x^2 - \alpha x - k\beta y - \gamma = 0$$

de même axe que la première. La connaissance du point f suffit pour déterminer cet axe et, celui-ci connu, la construction du centre de courbure de (4) en M n'offre pas de difficultés.

On peut notamment, pour l'obtenir, tirer par le point où l'axe rencontre la normale une parallèle à la tangente en M; par le point M tirer une parallèle à l'axe et du point d'intersection de ces deux droites abaisser la perpendiculaire sur l'axe. Elle passe au centre de courbure cherché. On a donc la construction suivante :

Le point f étant déterminé comme précédemment, on mène par ce point une perpendiculaire sur Ox. *Par le point où elle rencontre la normale en* M *on tire la parallèle à la tangente en* M *et par* M *on tire une parallèle à* Oy. *Du point d'intersection de ces deux parallèles on mène la parallèle à* Ox; *elle passe au centre de courbure cherché.*

[L²14]

POINTS D'INTERSECTION D'UNE SURFACE DU QUATRIÈME ORDRE AVEC LES ARÊTES D'UN TÉTRAÈDRE;

Par M. G. FONTENÉ.

1. Théorème. — *Les vingt-quatre points d'intersection d'une surface du quatrième ordre avec les*

six arêtes d'un tétraèdre vérifient trois conditions indépendantes de la surface considérée; trois de ces points sont déterminés par les vingt et un autres.

Une surface du quatrième ordre dépend de paramètres en nombre $\frac{5 \times 6 \quad 7}{6} - 1$, ou 34. Or, le tétraèdre étant pris comme tétraèdre de référence, on ne modifie pas les traces de la surface sur les arêtes en modifiant les termes

$$\begin{aligned} &yzt(by + cz + dt) \\ &\quad + xzt(a'x + c'z + d't) + \ldots + \ldots + kxyzt, \end{aligned}$$

qui sont au nombre de 13. Le nombre des paramètres dont dépendent les vingt-quatre points en question est donc 21; ces points vérifient trois conditions.

2. Corollaire I. — *Si une surface du quatrième ordre coupe les six arêtes d'un tétraèdre en vingt-quatre points dont douze appartiennent à une quadrique* S, *les douze autres sont aussi à une quadrique* S′.

En effet, par neuf des douze points restants on peut faire passer une quadrique S′; les deux quadriques S et S′ forment une S_4 qui doit contenir les trois derniers points; la quadrique S′ passe donc par ces points. Les équations des deux quadriques étant $S = 0$, $S' = 0$, l'équation générale des surfaces considérées est

$$S.S' + yzt(by + cz + dt) + \ldots + \ldots + \ldots + k.xyzt = 0,$$

avec 31 paramètres; *a priori* la surface doit vérifier trois conditions et dépend par suite de 31 paramètres.

Les douze premiers points vérifient trois conditions,

qui sont, par exemple, une condition dans chacune des faces DBC, DCA, DAB; le théorème impose trois conditions aux douze derniers points, et il se trouve que ce sont trois conditions *intrinsèques*, analogues à celles que vérifient les douze premiers points.

3. Cas particulier. — *Par les douze points de rencontre des arêtes d'un tétraèdre et d'une quadrique* S, *on peut (de différentes façons) faire passer quatre plans* α, β, γ, δ, *chacun de ces plans étant mené par trois points situés sur les arêtes issues d'un même sommet; les quatre droites d'intersection de ces plans avec les plans des faces opposées du tétraèdre appartiennent à un même hyperboloïde (condition triple).*

Ces quatre plans forment en effet une S_4 et les douze points que le corollaire I place sur une quadrique S′ sont trois à trois en ligne droite. — Les traces des plans α, β, γ sur le plan ABC rencontrent BC, CA, AB en trois points qui sont sur une droite : cette droite est la seconde génératrice de l'hyperboloïde dans le plan ABC.

Ce fait et le fait corrélatif ont été donnés par Chasles (*Aperçu historique*, note XXXII).

3*a*. Si la quadrique est tangente aux six arêtes du tétraèdre, on a ceci : les points de contact étant M, N, P, M′, N′, P′, les trois premiers sur les arêtes issues de D, et les plans tangents en ces points étant m, n, p, m', n', p', les quatre droites (MNP, ABC), (MN′P′, DBC), ... sont à un hyperboloïde, les quatre droites qui joignent le point (m', n', p') au point D, le point (m', n, p) au point A, ..., sont à un hyperboloïde. On peut dire : dans l'octaèdre hexagonal dont les

sommets sont M, N_1, P, M′, ..., les quatre droites d'intersection des plans des faces opposées sont à un hyperboloïde; dans l'hexaèdre octogonal dont les plans des faces sont m, n, p, m', ..., les quatre diagonales sont à un hyperboloïde. — L'axe d'homologie du triangle M′N′P′ et du triangle ABC est la seconde génératrice du premier hyperboloïde dans le plan ABC; l'axe d'homologie du trièdre mnp et du trièdre (a, b, c) est la seconde génératrice du second hyperboloïde issue de D.

3b. Si la quadrique est circonscrite (ou inscrite) au tétraèdre, le fait indiqué au n° 3 (ou le fait corrélatif) donne ceci : Étant pris quatre points A, B, C, D sur une quadrique, et les plans tangents en ces points étant α, β, γ, δ, les quatre droites d'intersection des plans δ et ABC, α et DBC, ..., sont à un hyperboloïde; les quatre droites qui joignent le point D au point (α, β, γ), ..., sont à un hyperboloïde. — On détermine comme au n° 3 les secondes génératrices situées dans les plans ABC, ..., ou issues des points (α, β, γ), ...

Ces faits ont été signalés d'abord par Steiner et Bobillier (*Annales de Gergonne*, t. XVIII).

3c. Les deux cas particuliers (3a) et (3b) dépendent encore du théorème général donné par Chasles pour deux tétraèdres qui sont polaires réciproques par rapport à une quadrique : les droites d'intersection des plans des faces correspondantes sont à un même hyperboloïde, les droites qui joignent les sommets correspondants sont à un même hyperboloïde (*Annales de Gergonne*, t. XIX).

4. Corollaire II. — *Si une surface du quatrième*

ordre est doublement tangente à chacune des six arêtes d'un tétraèdre, les douze points de contact sont à une quadrique.

Le mot *corollaire* indique ici, non une conséquence directe du théorème, mais un fait intimement lié au théorème; les douze points de contact doivent vérifier trois conditions. Si l'on suppose qu'ils sont à une quadrique, l'équation de cette quadrique étant $S = 0$, l'équation de la surface est

$$S^2 + yzt(by + cz + dt) + \ldots + \ldots + \ldots + k.xyzt = 0,$$

avec 22 paramètres; or, *a priori*, la surface doit vérifier douze conditions et dépendre par suite de 22 paramètres. Ce raisonnement est d'ailleurs insuffisant.

On a un fait corrélatif : *les plans tangents à la surface aux douze points où elle touche les arêtes sont tangents à une quadrique.*

5. Cas particulier. — Si deux quadriques touchent l'une et l'autre les six arêtes d'un tétraèdre, les douze points de contact sont à une même quadrique, les douze plans tangents en ces points sont tangents à une même quadrique (Steiner, *Annales de Gergonne*, t. XIX).

Cet énoncé est, si l'on veut, une réciproque de celui que l'on obtient en supposant que, dans le corollaire I, la surface du quatrième ordre est une quadrique double.

CORRESPONDANCE.

M. **F. Farjon**. — *Sur le quadrilatère inscriptible.* — Sous le n° 1589, j'ai proposé jadis (1888, p. 502) la démonstration d'une formule trigonométrique relative au quadrilatère inscriptible, et j'en demandais en même temps une interprétation géométrique.

M. Leinekugel a donné à cette question une réponse élégante (1892, p. 38); mais il n'a pas retrouvé le théorème qui m'avait servi de point de départ. En voici l'énoncé, d'ailleurs bien connu :

Dans tout quadrilatère inscriptible au cercle, la perpendiculaire abaissée du point d'intersection des diagonales sur la droite qui joint les milieux de ces deux lignes, et les perpendiculaires abaissées des points de rencontre des côtés opposés sur la droite qui joint respectivement les milieux de ceux-ci, se coupent en un même point, symétrique du centre du cercle circonscrit par rapport au centre de gravité du quadrilatère; et réciproquement.

Cf. (1892, p. 41-47) l'article « Sur le quadrilatère ».

Un Abonné. — *A propos de la transformation par hyperbolisme.* — La transformation par hyperbolisme est bien antérieure à la transformation par l'abscisse de Segner, signalée par M. M. d'Ocagne (*Nouv. Ann.*, 1915, p. 520). Elle est due à Newton, qui s'en est servi dans son *Enumeratio linearum tertii ordinis* (1706). (D'après Gomès Teixeira, *Traité des courbes spéciales remarquables*, t. I, p. 99 et 151; Félix Lucas, *Études analytiques sur la théorie générale des courbes planes*, p. 221.)

M. **R. Goormaghtigh.** — *Au sujet de la question* 1630. — MM. Brocard et Bouvaist ont donné de cette question des solutions (1915, p. 139, 472) basées sur le fait que, pour le

triangle spécial considéré, la potentielle triangulaire est une conique. Il peut être intéressant de signaler que Cesàro a démontré le théorème qui fait l'objet de cette question (*Natürliche Geometrie*, p. 133) et que sa démonstration ne fait pas intervenir la nature spéciale de la potentielle.

La potentielle triangulaire étant une courbe anharmonique, d'après la dénomination de Halphen, on voit aisément que, pour le triangle moyen où $a^2 = bc$, la tangente au centre de gravité est parallèle au côté a. On sait, en outre, d'après l'étude des courbes triangulaires symétriques de La Gournerie, dont les courbes anharmoniques constituent un cas limite, que le rayon de courbure en un point quelconque d'une courbe anharmonique est

$$4\,S^2\,\frac{\mu_1\mu_2\mu_3}{y_1y_2y_3},$$

μ_1, μ_2, μ_3 désignant les coordonnées barycentriques du point considéré, y_1, y_2, y_3 les distances des sommets à la tangente en ce point à la courbe et S l'aire du triangle. Il suffit de faire dans cette formule

$$\mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = \frac{1}{3},$$

$$y_2 = y_3 = 2\,S : 3a \qquad \text{et} \qquad y_1 = 4\,S : 3a$$

pour obtenir le théorème de la question 1630.

M. **F. Balitrand**. — *Sur les questions* 2259 *et* 2268. — En ce qui concerne la première (1915, p. 477), j'ai démontré, *après Laguerre* (*N. A.*, 1914, p. 8) que le triangle PQR est non seulement inscrit à une conique fixe, mais aussi conjugué par rapport à une autre conique fixe. De même pour 2268 (1915, p. 479), j'ai démontré (*Ibid.*, p. 12) que le triangle PQR est à la fois circonscrit à une conique fixe et conjugué par rapport à une autre conique fixe.

M. **G. Fontené**. — *Sur la question* 2152. — Cette question, qui fait double emploi avec 1968 (résolue), doit être annulée. *Voir* 1910, p. 288.

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES.

2217.

(1914, p. 96.)

Soit PP′ *un diamètre variable d'une ellipse de foyers* F *et* F′, PF *et* PF′ *rencontrent l'ellipse en* M *et* M′; MF′ et M′F *se rencontrent en* Q; PQ *rencontre* FF′ *en* K *et* MM′ *en* L. *Montrer que :*

1° *La tangente en* P′ *et* MM′ *se rencontrent en* R *sur* FF′;

2° *La droite* MM′ *enveloppe une ellipse et* L *est le point où* MM′ *touche son enveloppe;*

3° *Le lieu de* Q *est une ellipse de foyers* F *et* F′;

4° *Chacune des droites* PQ *et* P′Q *est normale à une ellipse fixe.* (E.-N. Barisien.)

Solution

Par M. R. Bouvaist.

Nous rappellerons tout d'abord la proposition suivante :

Si, par un foyer F d'une conique, on mène une sécante coupant la courbe en A et B, on a

$$\frac{1}{FA} + \frac{1}{FB} = 1 p,$$

p désignant le paramètre de la conique.

1° Le triangle PFF′ coupé par la transversale RMM′ donne

$$\frac{RF'}{RF} \times \frac{MF}{MP} \times \frac{M'P}{M'F'} = 1,$$

on a aussi

$$\frac{1}{M'F'} + \frac{1}{F'P} = \frac{1}{p}, \qquad \frac{1}{MF} + \frac{1}{FP} = \frac{1}{p},$$

d'où

$$\frac{M'P}{M'F'} = \frac{F'P}{p}, \qquad \frac{MP}{MF} = \frac{FP}{p};$$

d'où

$$\frac{\mathrm{RF}'}{\mathrm{RF}} = \frac{\mathrm{FP}}{\mathrm{F'P}} \quad \text{ou} \quad \frac{\mathrm{RF}'}{\mathrm{RF}} = \frac{\mathrm{F'P'}}{\mathrm{FP}};$$

le point R est le point d'intersection de la bissectrice extérieure de l'angle $\widehat{\mathrm{FP'F'}}$ avec FF'; c'est donc le point d'intersection de FF' avec la tangente en P'.

2° Par un point R de FF' passent deux droites MM'; l'enveloppe de ces droites est une conique, admettant les axes de l'ellipse donnée pour axes de symétrie, et bitangente à cette ellipse aux extrémités du grand axe; cette conique est une ellipse coaxiale à l'ellipse donnée d'axes a et b, et la longueur de ses axes est a et $\frac{b^3}{c^2}$.

L'enveloppe de MM' étant bitangente à l'ellipse donnée E aux extrémités du grand axe, MM' touche son enveloppe en son point d'intersection avec la polaire de R par rapport à E, c'est-à-dire au conjugué harmonique de R par rapport à MM', ou encore le faisceau P(RM'QM) étant harmonique, au point L.

3° Le triangle M'PF coupé par la transversale MQM' donne

$$\mathrm{FQ} = \mathrm{QM}' \times \frac{\mathrm{PF}'}{\mathrm{MP}} \times \frac{\mathrm{MF}}{\mathrm{M'F'}},$$

d'où, puisque

$$\frac{1}{\mathrm{MF}} + \frac{1}{\mathrm{FP}} = \frac{1}{p} \quad \text{ou} \quad \frac{\mathrm{MF}}{\mathrm{MP}} = \frac{p}{\mathrm{FP}}$$

et

$$\frac{1}{\mathrm{M'F'}} + \frac{1}{\mathrm{PF}'} = \frac{1}{p} \quad \text{ou} \quad \frac{\mathrm{PF}'}{\mathrm{M'F'}} = \frac{\mathrm{PF}'}{p} - 1,$$

$$\mathrm{FQ} = \mathrm{QM}'\left(\frac{\mathrm{F'P} - p}{\mathrm{FP}}\right) = (\mathrm{FM}' - \mathrm{FQ})\left(\frac{\mathrm{F'P} - p}{\mathrm{FP}}\right),$$

d'où, puisque

$$\mathrm{PF} + \mathrm{PF}' = 2a,$$

d'où

$$\begin{aligned}\mathrm{FQ}(a^2 + c^2) &= \mathrm{FM}'(a^2 + c^2 - a\,\mathrm{PF})\\ &= (2a - \mathrm{M'F'})(a^2 + c^2 - a\,\mathrm{PF});\end{aligned}$$

or

$$\mathrm{M'F'} = \frac{b^2\,\mathrm{PF}'}{a\,\mathrm{PF}' - b^2} = \frac{b^2\,\mathrm{PF}'}{a^2 + c^2 - a\,\mathrm{PF}},$$

d'où

$$\mathrm{FQ}(a^2 + c^2) = 2a(a^2 + c^2 - a\,\mathrm{PF}) - b^2\,\mathrm{PF}';$$

on a, de même,

$$F'Q(a^2+c^2) = 2a(a^2+c^2-a\,PF') - b^2\,PF,$$

d'où

$$FQ + F'Q = \frac{2a(2c^2-b^2)}{a^2+c^2}.$$

4° Les points RF'KF forment une division harmonique; le point K est donc le symétrique par rapport au centre O de l'ellipse donnée E, du pied de la normale en P à E. Soit P_1 le point qui correspond à P sur le cercle principal de E, la droite KP_1 rencontre le petit axe en K' et l'on a, φ étant l'angle P_1OF,

$$OK = \frac{c^2}{a}\cos\varphi, \qquad OK' = \frac{c^2}{a^2+c^2}a\sin\varphi = \frac{c^2}{a}\,\frac{a^2}{a^2+c^2}\sin\varphi,$$

la projection du segment KK' sur un plan faisant avec le plan du cercle principal un angle θ, tel que

$$\cos\theta = \frac{a^2+c^2}{a^2},$$

a donc une longueur constante; cette projection enveloppe une hypocycloïde à quatre rebroussements, et la droite PKQ une développée d'ellipse.

Il existe une correspondance univoque entre les points P' et Q, car si l'on se donne l'un, l'autre est déterminé et uniquement, P' décrivant l'ellipse E, Q décrit une ellipse E_1; il en résulte que l'enveloppe de P'Q est une courbe de quatrième classe; cette courbe admettant visiblement les axes de E_1 et de E_2 comme axes de symétrie et tangentes doubles, est une développée de conique.

Autre solution

Par M. T. Ono.

Soient

$$P(a\cos\alpha,\ b\sin\alpha),$$

$$M(a\cos\beta,\ b\sin\beta), \qquad M'(a\cos\beta',\ b\sin\beta')$$

et e l'excentricité de l'ellipse donnée

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1.$$

On a

$$\operatorname{tang}\frac{\beta}{2} = -\frac{1-e}{1+e}\cot\frac{\alpha}{2}, \qquad \operatorname{tang}\frac{\beta'}{2} = -\frac{1+e}{1-e}\cot\frac{\alpha}{2};$$

et l'on trouve successivement les coordonnées et les équations suivantes :

$$(\mathrm{MM'}) \qquad bx\cos\alpha + \frac{a(1+e^2)}{1-e^2}y\sin\alpha + ab = 0;$$

$$(\mathrm{Q}) \quad x = -\frac{a(1+3e^2)}{3+e^2}\cos\alpha, \qquad y = -\frac{b(1-e^2)}{3+e^2}\sin\alpha;$$

$$(\mathrm{PQ}) \quad bx\sin\alpha - a(1+e^2)y\cos\alpha + abe^2\sin\alpha\cos\alpha = 0;$$

$$(\mathrm{P'Q}) \qquad b(1+e^2)x\sin\alpha - a(1-e^2)y\cos\alpha + 2abe^2\sin\alpha\cos\alpha = 0;$$

$$(\mathrm{L}) \qquad x = -a\cos\alpha, \qquad y = -\frac{b(1-e^2)}{1+e^2}\sin\alpha.$$

Donc :

1° La tangente en

$$\mathrm{P'}(-a\cos\alpha, -b\sin\alpha)$$

et MM′ se rencontrent en

$$\mathrm{R}\left(-\frac{a}{\cos\alpha}, 0\right).$$

2° La droite MM′ enveloppe l'ellipse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2\left(\frac{1-e^2}{1+e^2}\right)^2} = 1;$$

et le point L est sur cette courbe. On voit que P′L est perpendiculaire à l'axe des x.

3° Le lieu de Q est l'ellipse

$$\frac{x^2}{a^2\left(\frac{1+3e^2}{3+e^2}\right)^2} + \frac{y^2}{b^2\left(\frac{1-e}{3+e^2}\right)^2} = 1;$$

et ses foyers sont F et F′.

4° L'enveloppe de PQ est la courbe

$$\left(\frac{x}{ae^2}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{y}{\frac{be^2}{1+e^2}}\right)^{\frac{2}{3}} = 1\,;$$

et cette courbe est la développée de l'ellipse

$$\frac{x^2}{a_1^2} + \frac{z^2}{b_1^2} = 1,$$

où

$$a_1 = \frac{b^2}{a(3+e^2)}, \qquad b_1 = \frac{b(1+e^2)}{3+e^2}\,;$$

donc la droite PQ est normale à cette ellipse.

L'enveloppe de P'Q est la courbe

$$\left(\frac{x}{\frac{2ae^2}{1+e^2}}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{y}{\frac{2be^2}{1-e^2}}\right)^{\frac{2}{3}} = 1,$$

et cette courbe est la développée de l'ellipse

$$\frac{x^2}{a_2^2} + \frac{y^2}{b_2^2} = 1,$$

où

$$a_2 = \frac{2b^2(1+e^2)}{a[4 - 1(1-e^2)^2]}, \qquad b_2 = \frac{2b(1-e^2)}{4-(1-e^2)^2}\,;$$

donc la droite P'Q est normale à cette ellipse.

N. B. — Les deux ellipses du n° 4° ont leurs foyers sur l'axe des y. En changeant b en bi, on aura les propriétés analogues pour une hyperbole.

Autres solutions par M[lle] ANNE DE PRÉHYR et UN ABONNÉ.

2218.

(1914, p. 96, 192.)

Quand deux normales MP, MQ *à une ellipse abaissées d'un point* M *sont rectangulaires :* 1° *la droite* RS, *qui joint les pieds* R *et* S *des deux autres normales issues de* M,

est telle que les axes interceptent sur cette droite une longueur constante égale au rayon du cercle orthoptique à l'ellipse; 2° la droite PQ *enveloppe une ellipse et la touche en son point de rencontre avec la corde* R'S' *symétrique de* RS *par rapport au centre* O *de l'ellipse.*

E.-N. Barisien.

Solution

Par Mlle Anne de Préhyr.

La droite PQ est la polaire d'un point C du cercle orthoptique; son enveloppe est donc déjà l'ellipse polaire réciproque de ce cercle pour l'ellipse donnée.

En posant $OC = d = \sqrt{a^2 + b^2}$ et en prenant les coordonnées de C sous la forme $(d\cos\alpha,\ d\sin\alpha)$, l'équation de PQ est

$$(\text{PQ})\qquad \frac{x\,d\cos\alpha}{a^2} + \frac{y\,d\sin\alpha}{b^2} - 1 = 0.$$

Le théorème de Joachimsthal sur les normales à l'ellipse montre que RS et OC ont des directions symétriques par rapport aux axes de l'ellipse donnée. On peut donc écrire l'équation de RS sous la forme

$$(\text{RS})\qquad x\sin\alpha + y\cos\alpha + \lambda = 0$$

et en exprimant que l'équation

$$(1)\qquad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 + \mu\left(\frac{x\,d\cos\alpha}{a^2} + \frac{y\,d\sin\alpha}{b^2}\right)(x\sin\alpha + y\cos\alpha + \lambda) = 0$$

est celle de l'hyperbole d'Apollonius de M, on a immédiatement $\lambda = d\sin\alpha\cos\alpha$.

L'équation de RS devient

$$(\text{RS})\qquad x\sin\alpha + y\cos\alpha + d\sin\alpha\cos\alpha = 0.$$

La droite RS est donc la droite symétrique par rapport à l'origine de celle qui joint les projections D, E de C sur les axes coordonnés; le segment intercepté sur RS par les axes coordonnés est donc égal à OC ou à d, comme il fallait le démontrer.

D'autre part, la droite PQ touche son enveloppe sur la droite m dont l'équation est

$$(m) \qquad \frac{x \sin\alpha}{a^2} - \frac{y \cos\alpha}{b^2} = 0.$$

Or on retrouve cette équation en éliminant le terme indépendant entre l'équation de PQ et celle

$$x \sin\alpha + y \cos\alpha - d \sin\alpha \cos\alpha = 0$$

de la droite DE. Le point où PQ touche son enveloppe est donc sur DE.

N. B. — 1° L'équation de l'enveloppe de PQ est

$$\frac{x^2 d^2}{a^4} + \frac{y^2 d^2}{b^4} = 1$$

ou

$$\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{1}{a^2 + b^2}.$$

2° En poursuivant l'identification de l'équation (1) avec celle de l'hyperbole d'Apollonius de M (x_1, y_1), en supposant d quelconque et en faisant $d \cos\alpha = x_2$, $d \sin\alpha = y_2$, on retrouve les formules de Deboves pour les coordonnées d'un pôle tangentiel C et d'un pôle normal M.

Autres solutions par MM. R. Bouvaist, J. Lemaire, T. Ono et Un Abonné.

2220.

(1914, p. 144.)

On considère les trajectoires orthogonales Γ *d'un système de cercles* C *homothétiques entre eux par rapport au pôle* O. *Le centre de courbure de la courbe* Γ *répondant au point* M *où elle coupe orthogonalement le cercle* C *est le pôle de la droite* OM *par rapport à ce cercle.*

M. d'Ocagne.

Solution

Par M. T. Ono.

Soient O l'origine des coordonnées et C le centre du cercle (C) qui est sur l'axe des x. En posant $OC = a$, le

rayon de (C) $= \lambda a$, on a

$$(x-a)^2 + y^2 = \lambda^2 a^2. \tag{1}$$

En éliminant a entre (1) et $(x-a)y' - y = 0$, on obtient l'équation différentielle de Γ

$$y^2(1+y'^2) - \lambda^2(xy'-y)^2 = 0. \tag{2}$$

On trouve, d'après (2),

$$y'' = \frac{yy'(1+y'^2)}{\lambda^2 x(xy'-y) - y^2 y'}.$$

Soient maintenant $K(x_1, y_1)$ le centre de courbure de Γ répondant au point $M(x, y)$ et R son rayon, et l'on a

$$R = \frac{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}{y''} = \frac{\lambda a(\lambda^2 ax - y^2)}{y(x-a)},$$

$$x_1 = x - \frac{\lambda^2 ax - z^2}{x-a}, \qquad y_1 = y + \frac{\lambda^2 ax - z^2}{y}. \tag{K}$$

On voit donc que KC et OM sont rectangulaires, et par suite que K est le pôle de OM par rapport à (C).

Autres solutions par Mlle Anne de Préhyr, M. J. Lemaire et Un Anonyme.

2223.

(1914, p. 336.)

Soient M *et* M′ *les extrémités de deux diamètres conjugués,* F *et* F′ *les foyers d'une ellipse. Trouver le lieu du point d'intersection de* MF *et* M′F′ *ou de* MF′ *et* M′F.

T. Ono.

Solution géométrique

Par M. R. Bouvaist.

Considérons le cercle dont l'ellipse donnée est la projection; soient Ox et Oy les diamètres de ce cercle correspondant au grand axe et au petit axe de l'ellipse. Soient M_1 et M'_1 les extrémités de deux diamètres rectangulaires du cercle; si O désigne le centre de celui-ci, les demi-droites $\overline{OM_1}$ et $\overline{OM'_1}$ font

avec Ox les angles φ et $\frac{\pi}{2}+\varphi$; soit a le rayon du cercle; posons enfin

$$\overline{\mathrm{OF}} = \overline{\mathrm{F'O}} = c, \qquad \widehat{\mathrm{M_1 FO}} = \theta, \qquad \widehat{\mathrm{M'_1 F'O}} = \theta'.$$

Les triangles $\mathrm{M_1 OF}$, $\mathrm{M'_1 OF'}$ donnent les relations

$$\frac{\sin\theta}{a} = \frac{\sin(\theta+\varphi)}{c}, \qquad \frac{\sin\theta'}{a} = \frac{\cos(\theta'-\varphi)}{c},$$

d'où, en éliminant φ, l'équation

$$(1) \qquad \frac{\sin^2\theta \sin^2\left(\theta'-\frac{\pi}{4}\right) + \sin^2\theta' \sin^2\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right)}{\cos^2(\theta+\theta')} = \frac{a^2}{2c^2}.$$

Soit P le point d'intersection de $\mathrm{M_1 F}$ et $\mathrm{M'_1 F'_1}$; prenons sur Oy le point A tel que le vecteur $\overline{\mathrm{OA}} = c$, construisons le point P′ inverse du point P par rapport au triangle FAF′; dans le quadrilatère FAF′P′, on a

$$\frac{\mathrm{AP'}}{\sin\theta} = \frac{\mathrm{FP'}}{\sin \mathrm{FAP'}}, \qquad \frac{\mathrm{AP'}}{\sin\theta'} = \frac{\mathrm{F'P'}}{\cos \mathrm{FAP'}},$$

d'où

$$\overline{\mathrm{AP'}}^2 = \overline{\mathrm{FP'}}^2 \sin^2\theta + \overline{\mathrm{F'P'}}^2 \sin^2\theta';$$

or

$$\mathrm{FP'} = -2c\,\frac{\sin\left(\theta'-\frac{\pi}{4}\right)}{\cos(\theta+\theta')}, \qquad \mathrm{F'P'} = -2c\,\frac{\sin\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right)}{\cos(\theta+\theta')},$$

d'où, en tenant compte de l'équation (1),

$$\mathrm{AP'} = a\sqrt{2}.$$

Le lieu du point P est donc la quartique circulaire trinodale inverse par rapport au triangle FAF′, du cercle de centre A et de rayon $a\sqrt{2}$; le lieu cherché est donc la projection de cette courbe sur le plan de l'ellipse.

On voit de même que le lieu du point d'intersection des droites MF′, M′F est la projection sur le plan de l'ellipse, de la quartique circulaire trinodale, inverse par rapport au triangle A′FF′ du cercle de centre A′ et de rayon $a\sqrt{2}$, A′ étant le symétrique de A par rapport à Ox.

2225.

(1914, p. 336.)

Soient Γ *et* C *une conique et le cercle, inscrits dans le triangle* ABC. *Trouver le lieu du point de contact de la conique variable* Γ *avec la quatrième tangente commune au cercle* C *et à la conique* Γ. *Étudier le cas particulier où la conique* Γ *est une parabole.*
N. ABRAMESCU.

SOLUTION

Par M. R. BOUVAIST.

Prenons le triangle ABC comme triangle de référence, soient

$$\Gamma = \frac{A}{u} + \frac{B}{v} + \frac{C}{w}, \qquad C = \frac{\alpha}{u} + \frac{\beta}{v} + \frac{\gamma}{w}.$$

La tangente commune à Γ et à C est la droite

$$\frac{x}{C\beta - B\gamma} + \frac{y}{A\gamma - C\alpha} + \frac{z}{B\alpha - A\beta};$$

elle touche Γ au point

$$(1) \qquad \left\{ \begin{array}{l} x = A(B\gamma - C\beta)^2, \\ y = B(C\alpha - A\gamma)^2, \\ z = C(A\beta - B\alpha)^2; \end{array} \right.$$

dans le cas général où la conique Γ est quelconque, le problème est indéterminé, ce qui du reste était évident *a priori;* si Γ est une parabole, on a

$$\frac{A}{a} + \frac{B}{b} + \frac{C}{c} = 0,$$

et les équations (1) montrent alors que le lieu du point de contact est une cubique admettant comme directions asymptotiques les côtés du triangle ABC et tangente à ces côtés aux points de contact de la conique C. Son équation en coordonnées trilinéaires normales sera donc de la forme

$$(ax + by + cz) \times (\alpha^2 x^2 + \beta^2 y^2 + \gamma^2 z^2 - 2\alpha\beta\, xy - 2\alpha\gamma\, xz - 2\beta\gamma\, yz) + \lambda\, xyz = 0;$$

on déterminera facilement le paramètre λ, en écrivant qu'un point du lieu correspondant à des valeurs de A, B, C satisfaisant à la relation

$$\frac{A}{a} + \frac{B}{b} + \frac{C}{c} = 0,$$

par exemple ($A = a$, $B = b$, $C = -2c$) est situé sur la cubique.

QUESTIONS.

2280. Si l'on divise la suite naturelle des nombres impairs en groupes successifs de termes dont les nombres sont indiqués par les carrés des termes de la suite de Fibonacci, la demi-somme des termes extrêmes du $n^{\text{ième}}$ groupe est égale au terme de rang $2n$ de la suite de Fibonacci.

R. Goormaghtigh.

2281. Soient A et B les points de contact des tangentes issues d'un point P à une conique Σ, les tangentes menées par A et B à une conique Σ' homofocale à Σ, touchent un cercle dont le rayon reste constant si P se déplace sur une conique homothétique et concentrique à Σ. En particulier, si A et B sont les extrémités de deux diamètres conjugués de Σ, le carré du rayon de ce cercle est égal à la différence des carrés des demi-axes de Σ et Σ'.

R. Bouvaist.

2282. Soit Γ la section d'une quadrique Σ par le plan polaire d'un point P par rapport à cette quadrique, la développable circonscrite à Γ et à une quadrique Σ' homofocale à Σ est circonscrite à une sphère dont le rayon reste constant si P décrit une quadrique homothétique et concentrique à Σ. En particulier, si Γ passe par les extrémités de trois diamètres conjugués de Σ, le carré du rayon de cette sphère est égal au double de la différence des carrés des demi-axes de Σ et Σ'.

R. Bouvaist.

2283. Σ et Σ' étant deux ellipsoïdes homofocaux, un plan tangent à Σ coupe Σ' suivant une conique dont l'aire est inversement proportionnelle au cube de la projection sur une perpendiculaire au plan sécant du demi-diamètre de Σ' conjugué de ce plan sécant. R. BOUVAIST.

2284. Σ et Σ' étant quadriques homofocales, les plans tangents à Σ parallèles aux plans tangents à un cône homofocal au cône asymptotique de Σ' coupent Σ' suivant des coniques d'aire constante. R. BOUVAIST.

2285. Soient A', B', C' les pieds des trois céviennes AM, BM, CM du triangle ABC, et N le point d'intersection de AM avec l'axe d'homologie des triangles ABC, A'B'C'. Démontrer que

$$\frac{A'N}{AN} = 2\,\frac{A'M}{MA}.$$

T. ONO.

2286. Factoriser le déterminant

$$\begin{vmatrix} 2abc & -c^3 & -b^3 & a \\ -c^3 & 2abc & -a^3 & b \\ -b^3 & -a^3 & 2abc & c \\ a & b & c & 0 \end{vmatrix}.$$

T. ONO.

ERRATA.

Tome XV, 1915 :

Page 407, équation (19), sous le radical *au lieu de* $b - x$, *lire* $x(b - x)$.

Même page, 11e ligne, équation, au dénominateur, *au lieu de* x, *lire* b.

Page 531, 10e ligne, *au lieu de* on joint $\beta\alpha''$, *lire* on joint $B\alpha''$.

[A3aα]

DÉMONSTRATION ALGÉBRIQUE DU THÉORÈME DE D'ALEMBERT ;

Par M. Léon POMEY [1],
Ingénieur des Manufactures de l'État.

Toute équation algébrique entière de degré n a n racines.

Considérons le polynome

$$f(z) = \mathrm{A}z^n + \mathrm{B}z^{n-1} + \ldots + \mathrm{K},$$

où z est une variable complexe $x + iy$, A, B, ..., K des nombres complexes quelconques (dont le premier et le dernier, A et K, sont supposés différents de zéro). Supposons qu'on mette $f(z)$ sous la forme ordinaire des nombres complexes, en désignant par $\mathrm{P}(x, y)$ et $\mathrm{Q}(x, y)$ les deux polynomes entiers par rapport aux variables réelles x et y, qui représentent la partie réelle et la partie imaginaire de $f(z)$; on aura

$$f(z) = \mathrm{P}(x, y) + i\,\mathrm{Q}(x, y)$$

et le carré de son module sera

$$|f(z)|^2 = \mathrm{F}(x, y) = \mathrm{P}^2(x, y) + \mathrm{Q}^2(x, y).$$

LEMMES PRÉLIMINAIRES.

Lemme I. — *Le polynome $f(z)$ est une fonction synectique, en sorte que les conditions classiques*

[1] Actuellement mobilisé comme lieutenant d'artillerie. Sur le front, en France, depuis le début des hostilités.

(*Note de la Rédaction.*)

suivantes sont toujours satisfaites :

$$(1) \qquad \frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial Q}{\partial y}, \qquad \frac{\partial P}{\partial y} = -\frac{\partial Q}{\partial x},$$

et que sa dérivée est

$$f'(z) = \frac{\partial P}{\partial x} + i\frac{\partial Q}{\partial x} = \text{aussi } \frac{\partial Q}{\partial y} - i\frac{\partial P}{\partial y}$$
$$= \text{aussi } nAz^{n-1} + (n-1)Bz^{n-2} + \ldots.$$

Nous admettons ce résultat sans démonstration.

Corollaire I. — Il résulte de là que :

Le polynome $f'(z)$, ainsi que toutes les autres dérivées successives sont aussi des fonctions synectiques, en sorte que les conditions suivantes sont également satisfaites :

$$\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 Q}{\partial x\, \partial y}, \qquad \frac{\partial^2 P}{\partial x\, \partial y} = -\frac{\partial^2 Q}{\partial x^2}$$

et

$$\frac{\partial^2 Q}{\partial y\, \partial x} = -\frac{\partial^2 P}{\partial y^2}, \qquad \frac{\partial^2 Q}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 P}{\partial y\, \partial x},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots, \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots$$

En sorte qu'on a

$$f''(z) = \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + i\frac{\partial^2 Q}{\partial x^2} = \text{aussi } \frac{\partial^2 Q}{\partial x\, \partial y} - i\frac{\partial^2 P}{\partial x\, \partial y}$$
$$= \text{aussi } \frac{\partial^2 Q}{\partial y^2} + i\frac{\partial^2 P}{\partial y^2},$$

et ainsi de suite pour les autres dérivées successives.

Corollaire II. — Il résulte de là immédiatement que :

Si un nombre $a = \alpha + i\beta$ annule toutes les $\lambda - 1$ premières dérivées [de façon qu'on ait

$f'(a) = f''(a) = \ldots = f^{\lambda-1}(a) = 0$], TOUTES *les dérivées partielles de* $P(x, y)$ *et* $Q(x, y)$ *sans exception jusqu'à l'ordre* $\lambda - 1$ *inclus s'annuleront pour le système de valeurs* $x = \alpha$, $y = \beta$.

LEMME II. — *Si* $|z|$ *tend vers l'infini, il en est de même de* $|f(z)|$.

On démontre en effet facilement que, L désignant un nombre positif quelconque, on peut déterminer un nombre positif R tel que $|f(z)|$ soit $> L$ dès que $|z|$ est $\geqq R$.

COROLLAIRE III. — Donnons à z une valeur quelconque z_0, et soit L la valeur correspondante de $|f(z)|$. On peut trouver un nombre positif R tel que, pour $|z| \geqq R$, on ait $|f(z)| > L$. La circonférence de rayon R, concentrique à l'origine, et la région intérieure du plan constituent un domaine borné et complet ou $|f(z)|$, qui varie d'une manière *continue* avec z, admet un *minimum* m au plus égal à L, qu'il *atteint effectivement* pour une valeur déterminée $a = \alpha + i\beta$ de z, dont l'affixe est *intérieure* au cercle C.

Je renvoie, pour les détails de la démonstration du lemme II et du corollaire III, au *Cours d'Analyse* de M. Jordan.

Je peux donc écrire

$$F(\alpha, \beta) = m^2.$$

LEMME III (relatif aux minima d'une fonction de deux variables). — Considérons une fonction *réelle quelconque* $F(x, y)$ de deux variables réelles, développable par la série de Taylor au voisinage d'un point (α, β) tel que $F(\alpha, \beta)$ soit un MINIMUM de $F(x, y)$,

d'où

$$F(x, y) = F(\alpha, \beta) + (x-\alpha)\frac{\partial F}{\partial \alpha} + (y-\beta)\frac{\partial F}{\partial \beta}$$
$$+ \frac{1}{1.2}\left[(x-\alpha)\frac{\partial F}{\partial \alpha} + (y-\beta)\frac{\partial F}{\partial \beta}\right]^2 + \ldots$$

(en représentant par un crochet armé d'un indice la puissance symbolique correspondante de la fonction incluse dans le crochet).

Je dis que :

L'ensemble des termes du plus bas degré en $x-\alpha$ *et* $y-\beta$, *dans ce développement, à la suite de* $F(\alpha, \beta)$, *doit nécessairement former un ensemble homogène (un polynome homogène) de degré* PAIR *par rapport à l'ensemble des deux variables* $x-\alpha$, $y-\beta$.

En effet, supposons que $|x-\alpha|$ et $|y-\beta|$ soient infiniment petits l'un et l'autre, mais de telle sorte que $\frac{x-\alpha}{y-\beta}$ tende vers une limite *finie* l choisie arbitrairement positive ou négative.

Soit alors λ le degré le plus faible pour l'ensemble des deux variables $x-\alpha$ et $y-\beta$; d'où

$$F(x, y) - F(\alpha, \beta) = (y-\beta)^{\lambda} P_{\lambda}(l)$$
$$+ (y-\beta)^{\lambda+1} P_{\lambda+1}(l) + \ldots,$$

$P_{\lambda}(l)$, $P_{\lambda+1}(l)$ représentant des polynomes en l de degrés λ, $\lambda+1$, ... au maximum respectivement.

Or je pourrai choisir le module de $y-\beta$ suffisamment petit pour que tous les termes à la suite du premier soient infiniment petits par rapport à lui, de façon que ce soit lui qui impose son signe au deuxième membre. En effet :

1° Si $F(x, y)$ est un polynome entier par rapport

à x et y, le développement de Taylor se réduit à un polynome entier, et la possibilité de rendre tous les termes à la suite du premier négligeables par rapport à lui ressort immédiatement de la démonstration, donnée par M. Jordan, du lemme II.

2° Si $F(x, y)$ n'est pas un polynome entier, cela résulte immédiatement des propriétés élémentaires des séries entières (de leur continuité et de leur convergence uniforme). Ce cas-là ne nous intéresse d'ailleurs pas directement pour la démonstration actuelle.

Or *cela étant posé, il est bien évident que, si* λ *est* IMPAIR, *je peux choisir le signe de* $y - \beta$ *de façon que le signe de* $(y - \beta)^\lambda P_\lambda(l)$, *et par conséquent du second membre, soit* (—).

En sorte qu'au voisinage du point (α, β) il y aurait des valeurs de $F(x, y)$ inférieures à son minimum $F(\alpha, \beta)$. Ce qui est contradictoire. *Donc il est nécessaire que* λ *soit pair*. En particulier il est *nécessaire* qu'on ait

$$\frac{\partial F}{\partial \alpha} = 0 = \frac{\partial F}{\partial \beta}.$$

Remarque. — *Ce lemme s'applique, comme cas particulier, au polynome* $F(x, y)$ *défini précédemment comme carré du module de* $f(z)$, *et au point* (α, β) *qui le rend minimum.*

THÉORÈME DE D'ALEMBERT.

Nous allons montrer, en supposant le théorème de d'Alembert vrai jusqu'au degré $n - 1$, que le minimum m atteint (corollaire III) par $|f(z)|$ est *nécessairement nul.*

Le théorème sera ainsi démontré pour le degré n, et

comme il est vrai pour le degré 1, il le sera d'une manière générale.

Or si m n'est pas nul, appelons μ la valeur que prend $f(z)$ quand z prend la valeur $a = \alpha + i\beta$. L'équation $f(z) - \mu = 0$ a donc une racine a. Par suite en divisant cette équation par $z - a$, on retombe sur une équation de degré $n - 1$ qui en a $n - 1$. Donc $f(z) - \mu = 0$ a n racines : $a, a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}$. Je dis que plusieurs de ces racines sont nécessairement égales et que celles qui sont distinctes ont un ordre de multiplicité PAIR.

En effet, on a, par la formule de Taylor,

$$(2) \quad \left\{ \begin{array}{l} f(z) = f(a_j) + (z - a_j) f'(a_j) + \dfrac{(z - a_j)^2}{1.2} f''(a_j) + \ldots \\ \qquad\qquad\qquad (j = 0, 1, 2, \ldots). \end{array} \right.$$

Or puisque $F(\alpha_j, \beta_j)$ est minimum, on doit avoir (lemme III) :

$$\frac{\partial F}{\partial \alpha_j} = 0 = 2\,P(\alpha_j, \beta_j)\frac{\partial P}{\partial \alpha_j} + 2\,Q(\alpha_j, \beta_j)\frac{\partial Q}{\partial \alpha_j},$$
$$\frac{\partial F}{\partial \beta_j} = 0 = 2\,P(\alpha_j, \beta_j)\frac{\partial P}{\partial \beta_j} + 2\,Q(\alpha_j, \beta_j)\frac{\partial Q}{\partial \beta_j}.$$

Puisque, par hypothèse, $P(\alpha_j, \beta_j)$ et $Q(\alpha_j, \beta_j)$ ne sont pas nuls tous deux, il faut qu'on ait

$$\frac{\partial P}{\partial \alpha_j}\frac{\partial Q}{\partial \beta_j} - \frac{\partial Q}{\partial \alpha_j}\frac{\partial P}{\partial \beta_j} = 0,$$

ou, en vertu des formules (1) (lemme I) :

$$\left(\frac{\partial P}{\partial \alpha_j}\right)^2 + \left(\frac{\partial Q}{\partial \alpha_j}\right)^2 = 0,$$

d'où

$$\frac{\partial P}{\partial \alpha_j} = 0 = \frac{\partial Q}{\partial \alpha_j} = \ldots.$$

Il en résulte (même lemme) que l'on a

$$f'(\alpha_j + i\beta_j) = 0.$$

Donc la formule de Taylor (2) montre que a_j est racine d'ordre au moins égal à 2. Soit λ son ordre de multiplicité. Il est forcément *pair*, car $f'(a_j)$, $f''(a_j)$, ..., $f^{\lambda-1}(a_j)$ étant nuls, il en est de même (corollaire II) de toutes les dérivées partielles de $P(x, y)$ et $Q(x, y)$ jusqu'à l'ordre λ exclusivement.

Or, puisque $F(\alpha_j, \beta_j)$ est un minimum, il faut (lemme III et remarque à la fin du lemme) que λ soit *pair*.

Donc l'équation $f(z) - \mu = 0$ n'a que des racines d'ORDRE PAIR, *ce qui est manifestement impossible si le degré n de* $f(z)$ est IMPAIR. Donc dans ce cas le théorème est ainsi démontré.

Si le degré n est PAIR, la théorie de la division des polynomes permet de mettre en évidence ces racines; d'où

$$f(z) - \mu \equiv A(z-a)^{2\lambda}(z-b)^{2\lambda'}\dots$$

Le second membre est donc le carré d'un polynome entier $p(z)$; d'où

$$f(z) \equiv p^2(z) + \mu,$$

$p(z)$ étant de degré $\frac{n}{2}$. On a donc

$$f(z) = [p(z) + i\sqrt{\mu}][p(z) - i\sqrt{\mu}].$$

Chacun des deux facteurs, mis ainsi en évidence, est un polynome entier de degré $\frac{n}{2}$, qui a par hypothèse $\frac{n}{2}$ racines, lesquelles devraient aussi être racines de $f(z)$.

On aboutit donc encore à une contradiction. Donc il est impossible de supposer $m \neq 0$. C. Q. F. D.

[K[1]2e]

SUR UNE QUESTION DE MANNHEIM ET SES APPLICATIONS A LA GÉOMÉTRIE DU TRIANGLE;

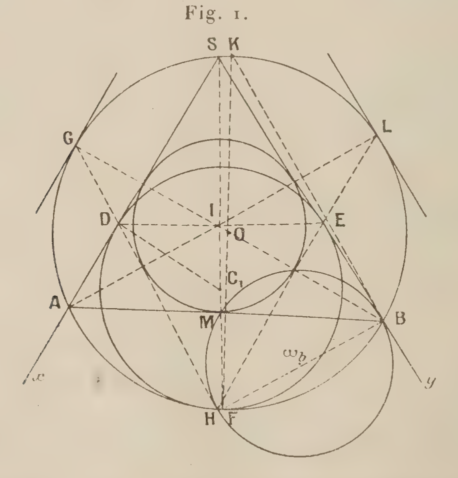
Par MM. R. GOORMAGHTIGH et V. THÉBAULT.

1. Mannheim a proposé la question suivante :

On donne un angle $x\mathrm{S}y$ *et un cercle inscrit* C. *Une tangente à ce cercle détermine un triangle* ASB. *Le cercle* ASB *reste tangent à un cercle fixe* C_1 *lorsque la tangente* AB *varie.*

Desboves (*Questions de Géométrie élémentaire*, 2e édition, p. 244) indique l'inversion comme mode de

Fig. 1.



démonstration. On y arrive aussi en utilisant la réciproque du théorème sur l'hexagone de Pascal (*fig.* 1).

A priori, le cercle C_1, s'il existe, est tangent à $\mathrm{S}x$

et à Sy; considérons donc le cercle C_1 qui est tangent à Sx, à Sy et au cercle ASB; soient D, E, H les points de contact. Par homothétie, si l'on trace HDG, la tangente en G est parallèle à SA et BG est bissectrice de l'angle SBA; de même, AL est bissectrice de l'angle SAB; ces droites se coupent donc au centre I du cercle C, point donné. L'hexagone de Pascal ASBGHLA donne alors D, E, I en ligne droite, de sorte que DE *est la perpendiculaire en* I *à* SI. Le cercle C_1 est donc fixe.

Cette démonstration a l'avantage de ne pas supposer connue d'avance la position du point C_1. Si l'on suppose connue la position du cercle C_1, la vérification peut du reste se faire d'une manière élémentaire.

La droite DE étant perpendiculaire à SI en I, la droite DC_1 étant perpendiculaire à Sx, il suffit de prouver que

$$R - C_1 D = OC_1,$$

R étant le rayon du cercle O, ou

$$R^2 - 2R \times C_1 D + \overline{C_1 D}^2 = \overline{OC_1}^2,$$

ou

$$R^2 - \overline{OC_1}^2 = 2R \times C_1 D - \overline{C_1 D}^2,$$

ou finalement

$$C_1 S \times FB = FK \times C_1 D,$$

soit

$$\frac{C_1 S}{C_1 D} = \frac{FK}{FB},$$

ce qui est évident.

Nous trouvons aussi dans le *Journal de Vuibert*, 1900, page 4, un sujet analogue :

On donne un cercle O *et deux cordes* MA, MB; *dans l'angle* AMB *on inscrit un cercle tangent en* C *et* D *aux côtés* MA, MB *et touchant également le*

cercle O. *Enveloppe de la droite* CD *lorsque, les points* A, B *restant fixes, le point* M *décrit le cercle* O.

Ainsi la proposition de Mannheim et celle du *Journal de Vuibert* nous conduisent au résultat suivant :

Soient un triangle ABC *et* I *le centre du cercle inscrit. La perpendiculaire en* I *à* IA *rencontre les deux côtés de l'angle* A *en des points* T_a *et la perpendiculaire à* AB *en* T_a *rencontre* AI *en* A'. *Le cercle de centre* A' *et de rayon* A'T_a *est tangent au cercle* O *circonscrit à* ABC.

C'est ainsi rédigée, que M. H. Brocard a bien voulu nous signaler la question comme étant susceptible de donner des résultats intéressant la géométrie du triangle.

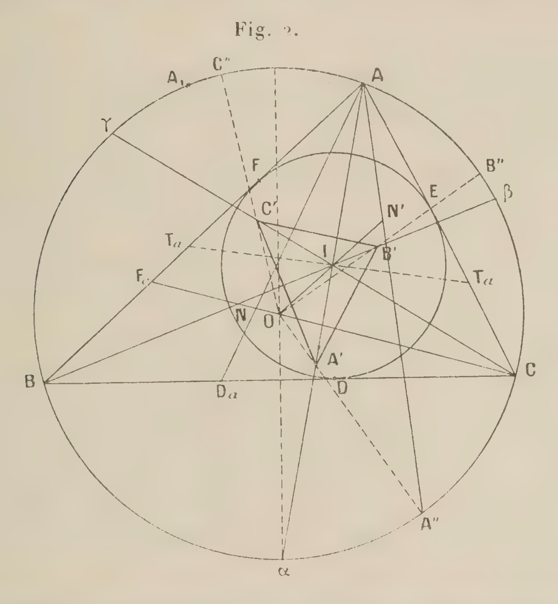
2. Revenons à la question même de Mannheim. En considérant deux positions infiniment voisines de AB, on voit que *le point de contact* H *du cercle* O *avec son enveloppe est sur le cercle tangent à* SA *en* A *et passant par le contact* M *de* AB *avec le cercle inscrit* I *et sur le cercle tangent à* SB *en* B *et passant en* M.

Cette propriété est fondamentale pour ce qui va suivre.

3. Considérons maintenant un triangle ABC. Soient I, O les centres des cercles inscrit et circonscrit de rayons r et R ; T_a, T_b, T_c les intersections des perpendiculaires en I à IA, IB, IC respectivement avec les côtés du triangle ABC; A', B', C' les centres des cer-

cles qui touchent le cercle O et les côtés du triangle respectivement en T_a, T_b, T_c; A″, B″, C″ les contacts de ces cercles avec le cercle O; D, E, F ceux du cercle inscrit I avec BC, CA, AB; D_a, E_a, F_a, D_b, E_b, F_b, D_c,

Fig. 2.



E_c, F_c les points analogues pour les cercles exinscrits I_a, I_b, I_c.

Le cercle ω circonscrit au triangle CDA″ touchant AC en C,

$$\text{angle } DA''C = \text{angle } B.$$

Donc A″D rencontre le cercle O au point A_1 symétrique de A par rapport à Oα, et

Les points de contact A″, B″, C″ *du cercle* O *et des cercles* A′, B′, C′ *sont situés sur les droites* A_1D, B_1E, C_1F, A_1, B_1, C_1 *étant les symétriques des sommets* A, B, C *par rapport aux médiatrices du triangle* ABC.

Les triangles A_1CD et $A_1A''C$ étant semblables, il en est de même de $A_1A''C$ et ABD_a. Par conséquent

$$\text{angle } A''AC = \text{angle } BAD_a,$$

et AA'' *est symétrique de* AD_a *par rapport à la bissectrice* AI.

De même BB'' *et* BE_b, CC'' *et* CF_c *sont respectivement symétriques par rapport aux bissectrices* BI *et* CI.

Il s'ensuit que *les trois droites* AA'', BB'', CC'' *sont concourantes en un point* N' *qui est l'inverse triangulaire du point* N *de Nagel du triangle* ABC. *Ce point* N' *est situé sur la ligne des centres des cercles inscrit et circonscrit.*

On en déduit aussitôt cette propriété :

Les triangles ABC *et* $A''B''C''$ *sont homologiques. Le centre* N' *d'homologie est l'inverse du point de Nagel relatif au triangle* ABC *et la polaire* Δ *de ce point par rapport au cercle* O, *perpendiculaire sur* IO, *est l'axe d'homologie de ces deux triangles.*

4. On peut encore donner au moyen de l'inversion une démonstration simple de ce théorème. Soient E_a, F_a les points de contact du cercle I_a exinscrit dans l'angle A avec les côtés AC et AB, r_a le rayon de ce cercle. Par le pied de la bissectrice de l'angle A menons la seconde tangente au cercle I_a; elle coupe les côtés AC et AB en P et Q et touche le cercle I_a en un point D'_a. Transformons la figure par inversion, le pôle étant le sommet A, la puissance $CA \times AB = bc$. Le cercle ABC est le transformé de PQ; le cercle Γ_a de centre A', de rayon $A'T_a$ a pour transformé le cercle I_a, car on a

$$AE_a \times AT_a = \frac{pr}{\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}} = \frac{2S}{\sin A} = bc.$$

Par conséquent, *le cercle* Γ_a *touche le cercle* ABC *en un point* A″, *situé sur la droite* AD'_a *symétrique de la droite* AD_a *par rapport à la bissectrice de l'angle* A.

5. B′C′, par exemple, rencontre BC en S, centre de similitude externe des cercles B′ et C′. Mais ces cercles touchent aussi le cercle O en B″ et C″; donc B″C″ passe aussi en S et *les trois droites* BC, B′C′, B″C″ *sont concourantes*. Alors :

Les triangles ABC *et* A′B′C′, A′B′C′ *et* A″B″C″ *forment deux groupes de triangles homologiques. Les centres d'homologie sont les centres* I *et* O *des cercles inscrit et circonscrit à* ABC. *L'axe d'homologie* Δ *commun à ces deux groupes de triangles est le même que précédemment, c'est-à-dire une droite perpendiculaire à la ligne des centres* IO *des cercles inscrit et circonscrit.*

6. On peut aisément démontrer analytiquement ces propriétés en prenant le triangle ABC pour triangle de référence. Désignons par ξ, η, ζ les coordonnées normales de A′ et par r le rayon du cercle inscrit. On a d'une part

$$\eta = \zeta = \frac{r}{\cos^2 \frac{A}{2}}.$$

La coordonnée ξ résulte ensuite de la relation

$$a\xi + \frac{(b+c)r}{\cos^2 \frac{A}{2}} = 2\,S.$$

On déduit de là que les cordonnées normales rela-

tives de ce point sont

$$a - 2p\sin^2\frac{A}{2}, \quad a, \quad a,$$

ou encore

$$1 - \frac{p}{2R}\operatorname{tang}\frac{A}{2}, \quad 1, \quad 1.$$

Par analogie, celles de B′ et C′ s'écrivent

$$\begin{array}{lll} 1, & 1 - \dfrac{p}{2R}\operatorname{tang}\dfrac{B}{2}, & 1 \\ 1, & 1, & 1 - \dfrac{p}{2R}\operatorname{tang}\dfrac{C}{2}. \end{array}$$

L'équation qui donne les coordonnées relatives du point d'intersection S de BC et B′C′ s'écrit

$$\begin{vmatrix} 0 & y & z \\ 1 & 1 - \dfrac{p}{2R}\operatorname{tang}\dfrac{B}{2} & 1 \\ 1 & 1 & 1 - \dfrac{p}{2R}\operatorname{tang}\dfrac{C}{2} \end{vmatrix} = 0,$$

ou

$$\frac{y}{\operatorname{tang}\frac{B}{2}} + \frac{z}{\operatorname{tang}\frac{C}{2}} = 0.$$

L'équation de l'axe d'homologie Δ des triangles ABC et A′B′C′ est donc

$$(1) \qquad \frac{x}{\operatorname{tang}\frac{A}{2}} + \frac{y}{\operatorname{tang}\frac{B}{2}} + \frac{z}{\operatorname{tang}\frac{C}{2}} = 0.$$

L'axe d'homologie Δ est la polaire trilinéaire du point $\left(\operatorname{tang}\frac{A}{2}, \operatorname{tang}\frac{B}{2}, \operatorname{tang}\frac{C}{2}\right)$.

On peut encore écrire l'équation (1) sous la forme

$$(2) \qquad \Sigma(p - a)x = 0.$$

On voit que l'axe Δ passe par le point d'intersection des droites $\Sigma x = 0$ et $\Sigma ax = 0$. Ces équations représentent respectivement la droite qui joint les pieds des bissectrices extérieures et la droite de l'infini, l'axe Δ est donc parallèle à la première de ces droites. Au moyen de l'équation (2), on voit aisément que son pôle, par rapport au cercle ABC, est le point

$$\left(\frac{a}{p-a}, \quad \frac{b}{p-b}, \quad \frac{c}{p-c}\right),$$

c'est-à-dire *l'inverse du point de Nagel.*

7. Le triangle formé par les inverses triangulaires A_2, B_2, C_2 des points A', B', C' est aussi homologique au triangle ABC. L'équation qui donne les coordonnées du point d'intersection de la droite B_2C_2 avec BC est

$$\begin{vmatrix} 0 & y & z \\ 1 & \dfrac{1}{1-\dfrac{p}{2R}\tang\dfrac{B}{2}} & 1 \\ 1 & 1 & \dfrac{1}{1-\dfrac{p}{2R}\tang\dfrac{C}{2}} \end{vmatrix} = 0,$$

ou

$$\left(\frac{2R}{p}\cot\frac{B}{2}-1\right)y+\left(\frac{2R}{p}\cot\frac{C}{2}-1\right)z=0.$$

L'axe d'homologie des triangles ABC, $A_2B_2C_2$ a donc pour équation

$$\frac{2R}{p}\Sigma x\cot\frac{A}{2}-\Sigma x=0.$$

Il résulte de là que cet axe passe par l'intersection de la droite (1) avec celle qui joint les pieds des bissectrices extérieures. On a donc ce théorème :

L'axe d'homologie du triangle ABC *et de celui*

formé par les inverses des points A′, B′, C′ *est aussi perpendiculaire à la ligne des centres des cercles inscrit et circonscrit au triangle* ABC.

8. La démonstration, au moyen de l'inversion, utilisée au paragraphe 4, montre qu'il existe également trois cercles A'_1, B'_2, C'_3 dont les centres sont situés sur les bissectrices AI, BI, CI et qui touchent extérieurement le cercle circonscrit O à ABC. Soient A''_1, B''_2 et C''_3 les points de contact.

Le cercle $BD_aA''_1$ *est tangent à* AB *en* B. Les propriétés de A''_1 sont analogues à celles du point A′ précédent, et AA''_1 *est symétrique de* AD *par rapport à la bissectrice* AI. *De même* BB''_2, CC''_3 *sont respectivement symétriques de* BE *et* CF *par rapport aux bissectrices* BI *et* CI.

Les trois droites AA''_1, BB''_2, CC''_3 *concourent donc au point* J′ *inverse triangulaire du point* J *de Gergonne du triangle* ABC. *Ce point est situé sur la ligne des centres* IO *des cercles inscrit et circonscrit.*

D'où cette propriété :

Les triangles ABC, $A'_1B'_2C'_3$, $A''_1B''_2C''_3$ *sont homologiques entre eux, les centres d'homologie étant respectivement* I, J′ *inverse triangulaire du point de Gergonne de* ABC, *et* O. *L'axe d'homologie est la polaire de* J′ *par exemple par rapport au cercle* O, *c'est-à-dire la droite qui joint les pieds des bissectrices extérieures. Cette droite est aussi perpendiculaire à la ligne des centres* IO *des cercles inscrit et circonscrit à* ABC.

9. Comme au paragraphe 6, on voit facilement que

les coordonnées normales relatives des points A'_1, B'_2 et C'_3 sont

$$\begin{array}{ccc} -a-2(p-a)\sin^2\frac{A}{2}, & a, & a, \\ b, & -b-2(p-b)\sin^2\frac{B}{2}, & b, \\ c, & c, & -c-2(p-c)\sin^2\frac{C}{2}. \end{array}$$

L'équation qui donne les coordonnées du point d'intersection S′ des droites BC et $B'_2C'_3$, est

$$(3)\quad \left[bc-b(p-c)\sin^2\frac{C}{2}\right]y+\left[bc-c(p-b)\sin^2\frac{B}{2}\right]z=0.$$

Or

$$(4)\qquad b(p-c)\sin^2\frac{C}{2}=\frac{1}{a}(p-a)(p-b)(p-c)$$
$$=c(p-b)\sin^2\frac{B}{2}.$$

L'équation (3) s'écrit donc

$$y+z=0.$$

L'axe d'homologie des triangles ABC, $A'_1B'_2C'_3$ *est donc la droite* $\Sigma x=0$, *qui joint les pieds des bissectrices extérieures.*

On retrouve donc les résultats du précédent paragraphe.

10. Cherchons maintenant, comme au paragraphe 7, l'axe d'homologie du triangle ABC et du triangle $A_3B_3C_3$ formé par les inverses triangulaires des points A'_1, B'_2, C'_3. Les coordonnées du point d'intersection de B_3C_3 avec le côté BC sont données par l'équa-

tion

$$\begin{vmatrix} 0 & y & z \\ 1 & -\dfrac{1}{1+\dfrac{2}{b}(p-b)\sin^2\dfrac{B}{2}} & 1 \\ 1 & 1 & -\dfrac{1}{1+\dfrac{2}{c}(p-c)\sin^2\dfrac{C}{2}} \end{vmatrix} = 0.$$

On voit aisément, en la développant et en tenant compte de la relation (4), qu'on peut encore l'écrire

$$y + z = 0.$$

La droite qui joint les pieds des bissectrices extérieures est aussi l'axe d'homologie du triangle fondamental et du triangle formé par les inverses des points A'_1, B'_2, C'_3.

11. Il existe d'ailleurs entre les points A'_1, B'_2, C'_3 et leurs inverses A_3, B_3, C_3 une relation géométrique simple, qui permet de déduire le théorème qui précède de considérations élémentaires. Désignons par T_b le point où la perpendiculaire élevée en I_b, sur la bissectrice de l'angle B, coupe le côté AB. On a

$$AT_b = \frac{p}{\cos^2\dfrac{B}{2}} - c$$

et, par suite,

$$\begin{aligned} \cot T_b AB'_2 &= \frac{1}{r_b}\left(p - c\cos^2\frac{B}{2}\right) \\ &= \frac{1}{r_b}\left[p - \frac{p(p-b)}{a}\right] = \frac{p(p-c)}{a r_b}. \end{aligned}$$

Si l'on appelle T_c le point où la perpendiculaire élevée en I_c sur la bissectrice de l'angle C rencontre le

côté AC, on a de même

$$\cot T_c AC'_3 = \frac{p(p-b)}{ar_c} = \frac{p(p-c)}{ar_b}.$$

Les droites AB'_2 et AC'_3 sont donc isogonales par rapport à l'angle A.

Les droites BC'_3 *et* CB'_2, CA'_1 *et* AC'_3, AB'_2 *et* BA'_1 *se coupent sur les bissectrices des angles* A, B, C *en des points qui sont les inverses de* A'_1, B'_2, C'_3.

12. D'autres propositions peuvent aussi être obtenues en utilisant les propriétés des centres de similitude de trois cercles donnés.

Ainsi considérons les cercles O, I et A'. Leurs centres de similitude externes sont en ligne droite; ces centres étant visiblement un point N'_1 de OI, A″ et A.

Les contacts du cercle O *et des cercles* A', B', C' *sont situés sur les droites qui joignent respectivement les sommets au centre de similitude externe des cercles circonscrit et inscrit au triangle* ABC.

Comme ces droites AA″, BB″, CC″ se coupent déjà en N', inverse triangulaire du point N de Nagel de ABC, nous obtenons cette proposition remarquable :

Dans un triangle ABC, *l'inverse triangulaire du point de Nagel est le centre de similitude externe* S *des cercles inscrit et circonscrit.*

La considération des cercles A'_1, B'_2, C'_3 et I_a, I_b, I_c donne à son tour ce théorème :

Dans un triangle ABC, *l'inverse triangulaire* J' *du point de Gergonne est le centre de similitude interne* S' *des cercles inscrit et circonscrit.*

On montre facilement, en considérant le cercle circonscrit O, le cercle d'Euler ω et le cercle inscrit I à un triangle ABC dont l'orthocentre est H et le centre de gravité G, que les droites HS et GS′ passent au point φ de Feuerbach du triangle ABC. Cette propriété peut donc être mise sous la forme suivante :

Dans un triangle ABC, *les droites qui joignent respectivement les inverses* N′ *et* J′ *des points de Nagel et de Gergonne à l'orthocentre et au centre de gravité passent au point* φ *de Feuerbach du triangle.*

13. Si l'on transforme par inversion le cercle inscrit, le centre d'inversion étant le sommet A, la puissance *bc*, on obtient le cercle A'_1. Le cercle transformé du cercle des neuf points passe par les symétriques de A par rapport à P et Q (§ 4) et par le point diamétralement opposé à A sur le cercle APQ. Par conséquent, le cercle homothétique du cercle A'_1 par rapport à A, pour le rapport d'homothétie 1 : 2, est tangent au cercle qui passe par P, Q et le centre O′ du cercle APQ; le point de contact appartient à la droite qui joint le sommet A au point φ de Feuerbach du triangle ABC. Si l'on observe que les cercles PO′Q et BOC sont symétriques par rapport à AI, on déduit aisément de ce qui précède le théorème suivant :

Les cercles homothétiques des cercles A'_1, B'_2, C'_3 *par rapport à* A, B, C, *pour le rapport d'homothétie* 1 : 2, *sont respectivement tangents aux cercles* BOC, COA, AOB. *Le triangle des points de contact est homologique au triangle* ABC, *le centre d'homologie étant l'inverse du point de Feuerbach de* ABC.

14. Calculons le rapport $IA' : IA'_1$, on a

$$IA' = IA \operatorname{tang}^2 \frac{A}{2},$$

$$IA'_1 = II_a + I_a A'_1 = IA \left(\frac{p}{p-a} \operatorname{tang}^2 \frac{A}{2} + \frac{a}{p-a} \right).$$

Par conséquent, le rapport considéré a pour expression

$$\frac{p-a}{p + a \cot^2 \frac{A}{2}} = \frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p(p-b)(p-c) + ap(p-a)} = \frac{r^2}{2\Sigma\, bc - \Sigma\, a^2}.$$

Cette valeur étant symétrique par rapport à a, b, c, il en résulte qu'on trouverait pour les rapports $IB' : IB'_1$, $IC' : IC_1$ des valeurs identiques.

Les triangles $A'B'C'$ *et* $A'_1 B'_1 C'_1$ *sont homothétiques par rapport au centre du cercle inscrit.*

15. Soit L le milieu de l'arc BC du cercle circonscrit. Cherchons la puissance de ce point par rapport au cercle C'. Si l'on désigne par R le point où la perpendiculaire élevée en I sur IC rencontre le côté BC, et si l'on observe que l'angle C'IL vaut $\left(90° + \frac{B}{2}\right)$, on a pour l'expression de cette puissance

$$\begin{aligned}
\overline{LC'}^2 - \overline{C'R}^2 &= \overline{IC'}^2 + \overline{IL}^2 + 2\, IC' . IL \sin \frac{B}{2} - \overline{C'R}^2 \\
&= \overline{IL}^2 + 2\, IC' . IL \sin \frac{B}{2} - \overline{IR}^2 \\
&= \overline{IL}^2 + \frac{r}{\cos^2 \frac{C}{2}} \left(4R \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2} - r \right) = \overline{IL}^2.
\end{aligned}$$

On trouverait pour la puissance de L par rapport au cercle B' une valeur identique, de là ce théorème :

Les groupes des cercles A' *et* B', B' *et* C', C' *et* A'

sont respectivement orthogonaux aux cercles BIC, CIA, AIB.

16. Le point L appartient à l'axe radical des cercles B′ et C′; ses coordonnées s'écrivent

$$-\frac{a}{b+c}, \quad 1, \quad 1.$$

D'autre part, on trouve aisément que les coordonnées du point de contact du cercle B′ avec BC sont

$$0, \quad a\sin C - \frac{2cr}{b}, \quad 2r;$$

celles du point de contact du cercle C′ avec BC sont de même

$$0, \quad 2r, \quad a\sin B - \frac{2br}{c}.$$

On en déduit, pour les coordonnées du milieu de la distance de ces deux points,

$$0, \quad \frac{1}{b}(p+b-c), \quad \frac{1}{c}(p-b+c).$$

L'axe radical des cercles B′ et C′ a donc pour équation

$$(p-a)(b^2-c^2)x - ab(p-b+c)y + ac(p+b-c)z = 0.$$

Les équations des axes radicaux des cercles C′ et A′, A′ et B′ s'écrivent de même

$$ab(p-a+c)x + (p-b)(c^2-a^2)y - bc(p+a-c)z = 0,$$
$$ac(p-a+b)x - bc(p+a-b)y - (p-c)(a^2-b^2)z = 0,$$

Par conséquent, le centre radical S des cercles A′, B′, C′ a pour coordonnées

$$2a(p-b)(p-c)+abc,$$
$$2b(p-c)(p-a)+abc, \quad 2c(p-a)(p-b)+abc,$$

ou

$$2 - \cos A, \quad 2 - \cos B, \quad 2 - \cos C.$$

Ce point S appartient donc à la droite OI.

Le centre radical des cercles A', B', C' *appartient à la ligne des centres des cercles inscrit et circonscrit au triangle* ABC.

17. On démontre comme au paragraphe 15 que la puissance du point L', diamétralement opposé à L sur le cercle ABC, par rapport aux cercles B'_2 et C'_3, est $\overline{I_b L'}^2$.

Les groupes de cercles B'_2 *et* C'_3, C'_3 *et* A'_1, A'_1 *et* B'_2 *sont respectivement orthogonaux aux cercles* $I_b B C I_c$, $I_c C A I_a$, $I_c A B I_b$.

Comme les triangles $A'B'C'$ et $A'_1 B'_2 C'_3$ sont homothétiques, l'axe radical des cercles B' et C' est parallèle à celui des cercles B'_2 et C'_3; de plus ces axes radicaux sont symétriques par rapport à O, puisque le premier passe par L, le second par L'.

Les axes radicaux des cercles A', B', C' *pris deux à deux et ceux des cercles* A'_1, B'_2, C'_3 *pris deux à deux sont symétriques les uns des autres par rapport au centre du cercle circonscrit à* ABC.

On en déduit que le centre radical des cercles A'_1, B'_2, C'_3 est le symétrique de S par rapport à O.

Le centre radical des cercles A'_1, B'_2, C'_3 *appartient à la ligne des centres des cercles inscrit et circonscrit, et est le symétrique du centre radical des cercles* A', B', C' *par rapport au centre du cercle circonscrit.*

Enfin les axes radicaux des cercles B' et C', C' et A',

A′ et B′ passent respectivement par les sommets du triangle formé par les tangentes au cercle circonscrit à ABC en A″, B″, C″.

Le triangle A′B′C′ *est orthologique au triangle tangentiel au triangle* A″B″C″; *le triangle* $A'_1 B'_2 C'_3$ *est orthologique au triangle tangentiel du triangle* $A''_1 B''_2 C''_3$.

18. Nous terminerons cette étude par quelques propriétés plus spéciales de la figure, qui pourra peut-être encore donner d'autres curiosités.

1° Les rayons des cercles A′, B′, C′ sont respectivement

$$\rho_a = \frac{r}{\cos^2 \frac{A}{2}}, \qquad \rho_b = \frac{r}{\cos^2 \frac{B}{2}}, \qquad \rho_c = \frac{r}{\cos^2 \frac{C}{2}}.$$

Les cercles ω_a, ω_b, ω_c (*fig.* 1) ont à leur tour pour rayons respectifs

$$\rho'_a = \frac{p-a}{2 \sin A}, \qquad \rho'_b = \frac{p-b}{2 \sin B}, \qquad \rho'_c = \frac{p-c}{2 \sin C}.$$

En remarquant que

$$AT_a = \frac{2r}{\sin A}, \qquad BT_b = \frac{2r}{\sin B}, \qquad CT_c = \frac{2r}{\sin C},$$

on a par exemple

$$\rho_a \times \rho'_a = \frac{r}{\cos^2 \frac{A}{2}} \, \frac{p-a}{2 \sin A} = \frac{r^2}{\sin^2 A} = \frac{\overline{AT}_a^2}{4}.$$

Donc les deux cercles A′ et ω_a sont tangents extérieurement; il en est de même des cercles B′ et ω_b, C′ et ω_c, ainsi que des cercles A'_1, B'_2, C'_3 et ω'_a, ω'_b, ω'_c. D'où cette propriété :

Les cercles A′, B′, C′ *sont respectivement tangents aux groupes de deux cercles* ω_a, ω_b, ω_c; *les cercles* A'_1, B'_2, C'_3 *sont respectivement tangents aux groupes de deux cercles* ω'_a, ω'_b, ω'_c.

2° Les cercles A′ et C′ par exemple touchent le côté CA en T_a et T_c tels que

$$\frac{AT_a}{CT_c} = \frac{2r\sin A}{2r\sin C} = \frac{a}{c}.$$

Les contacts de ces cercles avec les côtés AB et BC sont donc tels que la droite $T_a T_c$ est parallèle au côté CA du triangle. De plus cette droite est tangente au cercle inscrit I à ABC, car par exemple

$$\frac{BT_e}{BC} = \frac{a(p-b)}{ap} = \frac{p-b}{p} = \frac{h-2r}{h}.$$

D'où cette curieuse propriété :

Les six points T_a, T_b, T_c *de contact des cercles* A′, B′, C′, *respectivement avec les côtés* BC, CA, AB *du triangle* ABC, *sont les sommets d'un hexagone circonscrit au cercle* I *et dont les côtés sont parallèles et égaux deux à deux.*

[L³11a]

SUR LA DÉTERMINATION DES AXES DE L'INDICATRICE ET DES RAYONS DE COURBURE EN UN POINT D'UNE SURFACE DU SECOND ORDRE;

PAR M. R. BOUVAIST.

Je me propose de donner une solution du problème suivant :

Étant donnés une surface de second ordre Σ

admettant pour directions principales Ox, Oy, Oz; *un plan* π *tangent à cette surface au point* M, *déterminer les axes de l'indicatrice et les rayons de courbure en* M.

Soit MN la normale à Σ en M; le cône du second ordre ayant pour sommet M, et pour directrice la cubique aux pieds des normales menées à Σ par un point quelconque P de MN, a pour polaire réciproque, par rapport à Σ, une parabole (S) inscrite dans le triangle ABC, A, B, C étant les traces sur π des axes Ox, Oy, Oz de Σ. Le cône considéré étant capable d'une infinité de trièdres trirectangles est coupé par le plan π, suivant deux génératrices rectangulaires MR et MS, la cubique aux pieds des normales étant d'autre part le lieu des points α tels que la droite $P\alpha$ est perpendiculaire au plan polaire de α par rapport à Σ; les deux droites MR et MS sont conjuguées par rapport à Σ, c'est-à-dire sont les bissectrices des génératrices d'intersection de π et de Σ, ou enfin les axes de l'indicatrice en M. Ces axes sont donc les tangentes menées par M à la parabole (S) inscrite dans le triangle ABC et ayant pour directrice MO_1, O_1 étant la projection du centre O de Σ sur π, projection qui est l'orthocentre de ABC.

La parabole (S) est tangente à la droite Δ conjuguée de MN par rapport à Σ. Déterminons cette droite, ce sera par exemple l'intersection de π avec le plan polaire de la trace N_1 de la normale MN sur le plan principal OAB par rapport à Σ.

Si M_1 est la projection de M sur OAB, M_1 et AB sont pôle et polaire par rapport à la conique (E) section de Σ par OAB; la droite M_1N_1 est, de plus, perpendiculaire à AB. L'intersection I de Δ et de AB sera donc le

pôle de M_1N_1 par rapport à (E), ou encore le point de contact de AB avec la parabole de Chasles (p) de M_1 par rapport à (E). Cette parabole (p) ayant pour directrice OM_1 et étant tangente à OA et OB, si I_1 est le point d'intersection de AB avec la perpendiculaire OI_1 à OM_1, les points I et I_1 seront symétriques par rapport au milieu μ de AB.

Projetons orthogonalement la figure sur le plan π; on voit que le point I_1 sera le correspondant du point γ d'intersection de CM avec AB dans une involution dont le point central sera le pied H, de la hauteur CO_1H du triangle ABC et dont deux couples de points correspondants sont les points A et B; ce sera donc l'intersection de AB avec la perpendiculaire abaissée de C sur $O_1\gamma$.

Si maintenant nous prenons pour axes les droites MR et MS et la normale MN, l'équation tangentielle de Σ sera

$$au^2 + a'v^2 + 2cus + 2c'vs + 2c''ws + s^2 = 0;$$

la droite Δ conjuguée de MN par rapport à Σ aura pour équation $\frac{cx}{a} + \frac{c'y}{a'} - 1 = 0$, les rayons de courbure à Σ en M ont, d'autre part, pour valeurs $R_1 = -\frac{a}{c''}$, $R_2 = -\frac{a'}{c''}$; si l'on remarque maintenant que c, c', c'' sont les coordonnées du centre O de Σ par rapport aux axes MRSN, on est amené à la solution suivante du problème considéré :

Soient π *le plan tangent en un point* M *d'une quadrique* Σ *de centre* O; MN *la normale à cette surface;* A, B, C *les traces sur* π *des axes de* Σ : *les tangentes menées par* M *à la parabole inscrite dans le triangle* ABC *et admettant pour directrice la*

droite MO_1, O_1 *étant la projection de* O *sur* π, *sont les axes de l'indicatrice en* M.

Les droites AM, BM, CM *coupent* BC, CA, AB *en* α, β, γ; *les perpendiculaires abaissées de* A, B, C *sur* $O_1\alpha$, $O_1\beta$, $O_1\gamma$ *coupent* BC, CA, AB *en trois points* I_1, I_2, I_3, *qui sont sur une droite* Δ_1; *la droite* Δ, *isotomique de* Δ_1 *par rapport à* ABC, *coupe les axes de l'indicatrice en* R *et* S. *Si* O_2 *et* O_3 *sont les projections de* O *sur les plans* RMN, RSN, *les perpendiculaires abaissées de* R *et* S *sur les droites* MO_2, MO_3 *coupent* MN *en deux points* C'_1 *et* C'_2 *qui sont les symétriques des centres de courbure en* M *par rapport au plan* π.

Remarque. — Signalons la curieuse propriété suivante dont la démonstration se trouve dans la solution précédente, mais qu'il est facile de démontrer directement en se basant sur les propriétés les plus simples de la correspondance homographique :

Soient H *l'orthocentre d'un triangle* ABC, M *un point du plan de ce triangle;* AM, BM, CM *coupent* BC, CA, AB *en* α, β, γ; *les perpendiculaires abaissées de* A, B, C *sur* $H\alpha$, $H\beta$, $H\gamma$ *rencontrent* BC, CA, AB *en* I_1, I_2, I_3. *Ces trois points sont sur une droite* Δ *perpendiculaire à* MH. *Si* M *décrit une droite* Hx, *l'isotomique de* Δ *par rapport à* ABC *enveloppe la parabole inscrite dans* ABC *qui admet pour directrice* Hx.

Si l'on remarque que la droite Δ n'est autre que la polaire du point M par rapport au cercle conjugué au triangle ABC, on voit facilement que la propriété précédente s'étend sans difficulté au tétraèdre orthocentrique.

Remarque. — 1° Si N_1 est la trace sur le plan principal OAB de Σ de la normale MN, on voit facilement que la parabole (S) du plan π envisagée plus haut est la section par le plan π du cylindre parabolique de génératrices perpendiculaires à OAB ayant pour directrice la parabole de Chasles de N_1 par rapport à la section principale de Σ située dans le plan OAB.

D'où la propriété suivante :

Si N_2 *est la trace sur un plan principal de la quadrique* Σ *de la normale en un point* M *de cette surface, si* M_1 *est la projection de* M *sur le plan principal considéré* (P) *de* M, *les tangentes menées par* M_1 *à la parabole de Chasles de* N_1 *par rapport à la section principale de* Σ *située dans* (P) *sont les projections sur* (P) *des axes de l'indicatrice en* M.

2° R et S désignent, comme plus haut, les points d'intersection de la droite Δ conjuguée de la normale MN par rapport à Σ; on voit que le pôle du plan SMN par rapport à Σ est le point R; comme RM est perpendiculaire à SMN, R appartient à la cubique aux pieds des normales de M par rapport à Σ; la polaire réciproque par rapport à Σ du cône de sommet R ayant pour base cette cubique sera la parabole (p) du plan SMN, tangente à MN et à MS en S et inscrite au triangle ayant pour sommet les traces sur SMN des directions principales de Σ. Or la construction du centre de courbure de Σ correspondant à l'axe MS de l'indicatrice montre que ce point est le contact avec MN de la parabole de directrice MO_3, O_3 étant la projection du centre O de Σ sur SMN, tangente à MS en S ; nous pouvons donc énoncer la propriété suivante, dont on trouvera une autre démonstration dans les *Œuvres de Laguerre* :

Soient OA *et* OB *deux des axes d'une quadrique* Σ, M *un point de cette quadrique, la parabole tangente à* OA *et* OB, *et aux projections sur* OAB *de la normale en* M *à* Σ, *et d'un des axes de l'indicatrice en* M_1 *touche la projection de la normale en un point qui est la projection du centre de courbure principal de* Σ *en* M *qui correspond à l'axe de l'indicatrice considéré.*

3° De ce qui précède on peut aussi conclure que :

Si l'on considère un plan SMN *passant par la normale à une quadrique* Σ *en* M *et par l'un des axes* MS *de l'indicatrice en* M, *la parabole située dans ce plan inscrite au triangle ayant pour sommets les traces des axes de* Σ *sur ce plan et admettant pour directrice la droite* MO_3, O_3 *étant la projection du centre* O *de* Σ *sur* SMN, *touche la normale* MN *au centre de courbure principal correspondant à l'axe* MS *de l'indicatrice, et l'axe* MN *au pôle par rapport à* Σ *du plan* RMN, *passant par la normale* MN *et le second axe* RM *de l'indicatrice.*

Ce qui nous conduit immédiatement au théorème suivant, dû à Salmon (*Géométrie analytique à trois dimensions*, p. 197) :

Les centres de courbure principaux d'une quadrique Σ *en un point* M *sont les pôles du plan tangent à* Σ *en* M, *par rapport aux quadriques homofocales à* Σ *passant par* M.

[M¹5k]

SUR UNE PROPRIÉTÉ GÉNÉRALE DES CUBIQUES CIRCULAIRES UNICURSALES;

PAR M. F. GOMES TEIXEIRA.

On connaît bien cette propriété de la strophoïde :

Une droite quelconque passant par le centre du cercle dont elle est la cissoïdale coupe la courbe en deux points placés sur une circonférence qui passe par le nœud et a son centre au point d'intersection de la même droite avec la parallèle à l'asymptote menée par le nœud [1].

Je ne sais pas si l'on a déjà remarqué que cette proposition est un corollaire d'une autre, applicable à toutes les *cubiques circulaires unicursales*, comme on va le voir.

L'équation des cubiques circulaires unicursales, quand on prend pour origine le point double et pour axe des ordonnées une parallèle à l'asymptote, est

$$x(x^2+y^2) = \mathrm{A}x^2 + \mathrm{B}xy + \mathrm{C}y^2, \tag{1}$$

et l'équation de la *cissoïdale* du cercle et de la droite représentés par les équations

$$x^2+y^2-2(\alpha x+\beta y)=0, \qquad x=c, \tag{2}$$

est

$$\rho = 2(\alpha\cos\theta+\beta\sin\theta) - \frac{c}{\cos\theta},$$

(¹) *Voir*, par exemple, mon *Traité des courbes spéciales*, t. I, p. 38.

ou

$$(3)\qquad x(x^2+y^2)=2(\alpha x+\beta y)x-c(x^2+y^2),$$

et cette équation est identique à l'équation (1) quand on détermine α, β, c au moyen des équations

$$A=2\alpha-c,\qquad B=2\beta,\qquad C=-c.$$

Remarquons maintenant que le cercle défini par l'équation

$$(4)\qquad x^2+y^2-2\lambda y=0,$$

lequel passe par le point double de la cubique (3) et a son centre sur la parallèle à l'asymptote menée par ce point, coupe cette cubique en deux points placés sur la droite correspondant à l'équation

$$(5)\qquad 2(\lambda-\beta)x+2\alpha y=2\lambda(2\alpha-c),$$

et que cette droite passe par un point dont les coordonnées (a, b) sont données par les équations

$$a=2\alpha-c,\qquad b=\frac{\beta(2\alpha-c)}{\alpha}.$$

La position de ce point ne dépend pas de λ et, comme ses coordonnées vérifient l'équation (3) et l'équation

$$\frac{b}{a}=\frac{\beta}{\alpha},$$

il coïncide avec le point d'intersection de la cubique définie par l'équation (3) avec la droite qui passe par le point double et par le centre (α, β) du cercle défini par la première des équations (2), dont la cubique est la cissoïdale.

En faisant $x=0$ dans l'équation (5), on voit encore que la droite qu'elle représente coupe l'axe des ordon-

nées en un point dont l'ordonnée y_1 vérifie l'équation

$$\frac{y_1}{\lambda} = \frac{2\alpha - c}{\alpha},$$

et que par conséquent le rapport de y_1 au rayon λ du cercle (4) est constant, quelle que soit la position du centre sur l'axe des ordonnées.

De tout ce qui précède résulte le théorème suivant :

Une droite quelconque D, *passant par le point d'intersection de la cubique* (3) *avec la droite qui passe par son point double et par le centre du cercle dont elle est la cissoïdale, coupe cette cubique en deux points placés sur une circonférence* (4) *qui passe par le point double et a son centre sur le parallèle à l'asymptote de la cubique, menée par ce point double. Le rapport de* y_1 *au rayon du cercle est constant et égal à* $\frac{2\alpha - c}{\alpha}$, *quelle que soit la direction de la droite* D.

Si la cubique donnée est la *strophoïde*, la droite représentée par la seconde des équations (2) passe par le centre du cercle correspondant à la première, et l'on a par conséquent $c = \alpha$, et ensuite

$$a = \alpha, \qquad b = \beta, \qquad y_1 = \lambda.$$

La proposition énoncée au commencement de cet article résulte, comme corollaire, du théorème qu'on vient d'énoncer et de ces égalités.

NÉCROLOGIE.

Nous insérons avec empressement les deux notices qui suivent et que nous adresse notre dévoué collaborateur, le commandant Barisien.

Bien qu'ils n'aient pas participé, croyons-nous, à la rédaction des *Nouvelles Annales*, Malo et Welsch étaient des mathématiciens doués d'une grande sagacité et qui ont apporté une contribution notable au mouvement mathématique contemporain.

La Rédaction s'associe donc de tout cœur aux regrets exprimés par l'auteur de ces deux notices. Elle envoie ses condoléances respectueuses et sincères à Mme Malo et à ses quatre filles, d'une part; et de l'autre à Mme Welsch et à sa fille.

Le commandant Ernest Malo.

Nous apprenons avec regret le décès d'Ernest Malo, chef de bataillon du génie en retraite, survenu à Caen, le 18 novembre 1915, à l'âge de 59 ans. Le défunt, entré à l'École Polytechnique en 1875, était chef du génie à Caen lorsque l'état de sa santé l'obligea en 1911 à prendre sa retraite. En 1914, à la déclaration de guerre, il voulut reprendre du service. Il fut d'abord envoyé à Rouen et de là à Caen, où il reprit ses anciennes fonctions de chef du génie. Mais la maladie l'obligea de nouveau à résigner ses fonctions en juin 1915.

Le commandant Malo était officier de la Légion d'honneur. Passionné pour l'étude des Mathématiques, il était un des plus distingués et assidus collaborateurs de l'*Intermédiaire des Mathématiciens.* Le jour même de sa mort, il préparait un article pour cette Revue.

Le colonel Julien Welsch.

Nous apprenons avec peine le décès de M. Julien Welsch, survenu le 12 janvier 1916 au château de Montussant, près Aigueperse (Puy-de-Dôme). Le défunt était lieutenant-colonel d'artillerie en retraite, de la promotion 1868 de l'École Polytechnique, officier de la Légion d'honneur. Malgré ses 66 ans, il reprit du service dès le début de la guerre, et le 2 août 1914 il rejoignait à Épinal le 8e régiment d'artillerie à pied. Au bout de quelques mois de séjour au front, sa santé s'altéra; il fut obligé de quitter le service, et c'est cette maladie qui l'a emporté.

Les lecteurs de l'*Intermédiaire des Mathématiciens* n'oublieront pas le savant et assidu collaborateur qu'était le colonel Welsch.

E.-N. Barisien.

CORRESPONDANCE.

M. F. Gomes Teixeira. — *Sur un article récent des « Nouvelles Annales »*. — Permettez-moi quelques observations sur l'article publié (1915, p. 511).

Les relations entre la *développante du cercle*, la

spirale d'Archimède, la *spirale hyperbolique* et la *spirale tractrice*, données dans cet article, ne sont pas nouvelles. Elles se trouvent dans mon *Traité des courbes spéciales*, avec l'indication des auteurs qui les ont données (t. II, p. 195-198).

La première proposition est un cas particulier d'un théorème donné par Chasles dans la *Correspondance mathématique de Quetelet* (t. I, 1832, p. 41), savoir :

Si par le point M *d'une développante d'un cercle on tire la tangente et par le centre du cercle une droite* OA, A *désignant le point où elle coupe la tangente, le lieu décrit par* A, *quand* M *et* OA *varient de manière que l'angle* OAM *reste constant, est une spirale d'Archimède.*

Le théorème énoncé dans l'article mentionné ci-dessus correspond au cas où l'angle OAM est droit.

Le théorème suivant lequel *la podaire d'une développante de cercle, par rapport au centre du cercle directeur, est une spirale d'Archimède*, a été donné par Mannheim daus les *Nouvelles Annales* (1880, p. 186).

La propriété de la caustique de la développante du cercle, qui en résulte, a été énoncée par Chasles dans la *Correspondance mathématique* mentionnée plus haut.

Le théorème qui dit que *la podaire réciproque d'une développante de cercle, par rapport au cercle directeur, est une spirale hyperbolique*, a été énoncé par M. Neuberg dans la *Nouvelle Correspondance* (t. VI, 1880, p. 408).

Enfin, le théorème qui dit que *la courbe inverse de la développante d'un cercle, par rapport au cercle*

directeur, est une spirale tractrice, a été donné par Cotes dans l'*Harmonia mensurarum* (1722, p. 84).

M. **G. Humbert.** — *Sur une Note de M. Fontené.* — Voici quelques remarques que me suggère la Note de M. Fontené (*N. A.*, 1915, p. 515).

Étant donnés dans l'espace six points A_i, on considère les couples de points M, M', tels que les quadriques passant par l'un d'eux et par les A_i passent aussi par l'autre : *il s'agit de trouver le lieu des points* M *confondus avec leur conjugué*, M'.

Or : 1° en répétant un raisonnement de M. Fontené, on voit que la cubique gauche Γ_i, qui passe par M et par les cinq points A autres que le point A_i, admet pour *corde* la droite A_iM'. Il en résulte que, si M' est confondu avec M, la droite A_iM est corde de Γ_i; par suite, les six droites MA_j ($j = 1, \ldots, 6$) sont sur un même cône du second ordre.

2° Inversement, si M est le sommet d'un cône du second ordre passant par les six points A_j, il est évident que M' coïncide avec M.

Donc, *la surface cherchée est le lieu des sommets des cônes quadriques qui passent par les six points* A_j.

C'est une surface bien connue, dite de Weddle (*voir* Weddle, *Camb. and Dubl. math. Journ.*, 1850; pour la transformation indiquée par M. Fontené, *voir* de Paolis, *Memorie Lincei*, 4e série, t. I, p. 576; *Rendiconti Lincei*, 4e série, t. VI, p. 3); elle est étudiée assez complètement, avec références bibliographiques nombreuses, dans l'Ouvrage de M. Hudson : *Kummer's quartic Surface*. Presses de l'Université de Cambridge, 1905.

UNE QUESTION DE LICENCE ;

PAR UN ABONNÉ.

Les axes étant rectangulaires, on donne la parabole représentée par l'équation

$$y^2 - 2px = 0.$$

En un point (x, y) de la parabole on mène la tangente, et une droite D *symétrique de la tangente, par rapport à la parallèle à l'axe* OX *qui passe par* M.

1° *Déterminer les coordonnées du point* M' *où la droite* D *rencontre la parabole.*

2° *Déterminer les coordonnées du point* C, *milieu de* MM', *et trouver le lieu du point* C, *quand le point* M *décrit la parabole.*

3° *Trouver l'enveloppe d'une droite* CN, *passant par* C *et parallèle à la tangente en* M *à la parabole.*

4° N *étant le point de contact de la droite* CN *avec son enveloppe, démontrer que la droite* NM *passe par le sommet* O *de la parabole.*

(Montpellier, juin 1913.)

(*Nouvelles Annales*, 1915, p. 39.)

La droite D est la corde commune à la parabole et à son cercle osculateur en M.

Soit T le point de rencontre des tangentes en M et M' à la parabole.

Désignons par M_1 le symétrique du point M par rapport à l'axe de la parabole. La tangente à cette courbe en M_1 est parallèle à la corde commune MM'. De plus, d'après un théorème bien connu, la droite TC passe en M_1 et a son milieu en ce point.

Si donc on appelle μ, μ' et γ les projections sur OX des points M, M' et C et si N_1 est le point de rencontre, situé sur l'axe, des tangentes à la parabole en M et M_1, on voit que

$$(1) \qquad C\gamma = M\mu, \qquad M'\mu' = 3\,M\mu;$$

ce qui donne les ordonnées des points C et M' en fonction de celle de M.

On a ensuite, puisque dans la parabole la sous-tangente est double de l'abscisse du point de contact, $O\mu = ON_1$. Appelons P le point où la droite D rencontre l'axe OX, nous aurons

$$\mu P = \mu N_1 = 2\,O\mu;$$

d'où l'on déduit sans peine, pour les abscisses des points C et M',

$$(2) \qquad O\gamma = 5\,O\mu, \qquad O\mu' = 9\,O\mu.$$

Des formules (1) et (2) il résulte que le lieu du point C est une parabole de même sommet et de même axe que la parabole donnée et de paramètre cinq fois plus petit.

Désignons par C_1 et C_2 les points où la droite CN rencontre l'axe et la tangente au sommet de la parabole. Élevons en C_2 une perpendiculaire à CN et soit φ le point où elle rencontre OX; je dis que ce point est fixe.

En effet, menons en M la normale à la parabole. Elle est perpendiculaire à CN et rencontre OX en Q. Les

deux triangles MN_1Q, $C_1C_2\varphi$ sont semblables et l'on a

$$\frac{O\varphi}{\mu Q} = \frac{OC_1}{\mu N_1} = \frac{7 . O\mu}{2 . O\mu} = \frac{7}{2}.$$

Mais μQ n'est autre que la sous-normale, c'est-à-dire le paramètre p. Donc le point φ est fixe et l'enveloppe de CN est une parabole ayant ce point pour foyer et Oy pour tangente au sommet ; autrement dit, une parabole homothétique à la proposée; le centre d'homothétie étant le sommet O et le rapport d'homothétie -7.

Les droites CN et MN_1 étant deux tangentes parallèles de ces paraboles homothétiques, leurs points de contact sont en ligne droite avec le centre O ; par suite, le point N se trouve sur la droite OM.

On peut ajouter que le lieu du point T et l'enveloppe de la droite MM' sont également deux paraboles. D'ailleurs ces deux courbes sont polaires réciproques par rapport à la parabole donnée.

En ce qui concerne le point T, il est symétrique du point M par rapport au point N_1. Ses coordonnées sont $-3\,O\mu$, $-M\mu$. Il décrit donc une parabole homothétique inverse de la proposée par rapport au sommet O avec un rapport d'homothétie égal à $-\frac{1}{3}\cdot$ La tangente en T à cette courbe est la droite PT, en vertu de la propriété fondamentale de la sous-tangente à la parabole.

Soit R le point où D rencontre la tangente au sommet. La perpendiculaire à D en ce point coupe OX en f. Les deux triangles $Rf P$, $C_1C_2\varphi$ sont semblables et donnent

$$\frac{Of}{O\varphi} = \frac{OP}{OC_1} = \frac{3}{7}.$$

Comme $O\varphi_1 = \frac{7}{2}p$, on a

$$Of = \frac{3}{2}p.$$

Le point f est fixe et l'enveloppe de D est une parabole ayant ce point pour foyer et O pour sommet. Comme elle est homothétique de la parabole donnée par rapport à O et que D est parallèle à la tangente M_1N_1, le point où D touche son enveloppe est sur la droite OM_1.

CERTIFICATS DE MÉCANIQUE RATIONNELLE.

Besançon.

Épreuve théorique. — Première question. — *Attraction newtonienne des ellipsoïdes homogènes.*

Cas de l'ellipsoïde de révolution aplati.

Deuxième question. — *On considère un ellipsoïde de révolution* FAIBLEMENT APLATI. *Montrer que cet ellipsoïde supposé homogène attire* les points situés à sa surface *avec une force dont l'intensité* varie A TRÈS PEU PRÈS *comme le sinus carré de* la latitude (*angle de la normale avec le plan de l'équateur*).

En déduire le parallèle sur lequel l'attraction est sensiblement *la même que si toute la masse de l'ellipsoïde était concentrée sur son centre et faire voir que la sphère concentrique à l'ellipsoïde et dont la surface contient ce parallèle a un volume* sensiblement *égal au volume de l'ellipsoïde.*

Troisième question. — *Un système* S *de n points matériels forme* un système semblable *à un système solide* S_0 *de n points matériels qui est connu ; le système* S *est soumis*

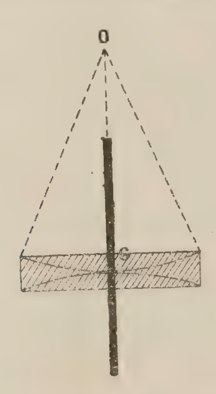
aux forces mutuelles qui sollicitent ses différents points envisagés deux à deux; former les équations du mouvement du système S autour de son centre de gravité O; on adoptera comme axes de coordonnées les droites menées par O qui sont dans S les homologues respectives des axes principaux d'inertie du solide S_0 par rapport à son centre de gravité G_0.

Épreuve pratique. — Première question. — *Trois surfaces sphériques concentriques S_1, S_2, S_3 de rayons décroissants R_1, R_2, R_3 portent des charges électriques uniformément réparties sur chacune d'elles et dont les valeurs respectives sont Q_1, Q_2, Q_3. La fonction potentielle V due à ce système de charges prend les valeurs respectives*

$$\begin{aligned} V_1 &= V_0 \quad \text{sur} \quad S_1, \\ V_2 &= V_0 \quad \text{sur} \quad S_2, \\ V_3 &= 0 \quad \text{sur} \quad S_3. \end{aligned}$$

Calculer les charges Q_1, Q_2, Q_3 et les densités superficielles correspondantes. Répartition des valeurs de V dans l'espace.

Deuxième question. — *Un pendule oscillant et éprouvant une résistance proportionnelle à sa vitesse angulaire bat*



la seconde par chacune de ses oscillations simples; *on a observé que l'amplitude de ses petites vibrations est réduite de moitié en* 1 *heure.*

Le pendule pèse 7^{kg}; *son centre de gravité est à une distance de l'axe de suspension égale à* 1^m.

1° *On demande en kilogrammètres la valeur du moment résistant rapporté à la vitesse angulaire* 1;

2° *On demande la valeur du moment résistant lorsque le pendule traverse sa position d'équilibre, la valeur de la semi-amplitude de son oscillation en cours étant alors de* 1°. (Juillet 1913.)

Épreuve théorique. — *Mouvement d'un point matériel pesant suspendu à l'extrémité d'un fil de masse négligeable enroulé sur une poulie verticale fixe.*

Cas des petites oscillations.

Épreuve pratique. — *Une force appliquée à un point matériel libre, de masse m, mobile dans un plan, a pour composantes parallèles aux axes de coordonnées*

$$X = -m\omega^2\left[\frac{\partial\varphi}{\partial x} + \frac{3}{2}\,\frac{\partial\psi}{\partial x}\right],$$

$$Y = -m\omega^2\left[\frac{3}{2}\,\frac{\partial\varphi}{\partial y} + \frac{\partial\psi}{\partial y}\right],$$

où

$$\varphi \equiv x^2 + 2hxy + 3y^2,$$
$$\psi \equiv 3x^2 + 2h'xy + y^2$$

(x, y, *coordonnées cartésiennes du mobile*).

On demande :

1° *La condition d'inégalité qui lie les coefficients* h *et* h', *pour que le mouvement étudié résulte de la composition de mouvements vibratoires simples;*

2° *Les périodes de ces derniers mouvements.*

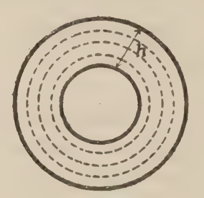
(Novembre 1913.)

Épreuve théorique. — Première question. — 1° *Mouvement d'un point pesant sur une surface de révolution dont l'axe est vertical, le point matériel de masse m étant (en plus de son poids et d'une réaction normale à la surface) soumis à une* résistance K^2mV, *proportionnelle à sa vitesse* V *et en sens inverse de la direction de sa vitesse.*

2° *Cas où la surface serait un tore à axe vertical.*

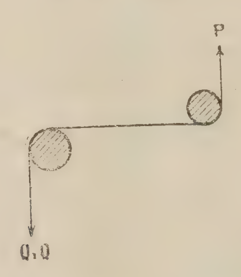
Deuxième question. — 1° *Une pression normale uniformément répartie sur une surface fermée* RIGIDE *laisse la surface en équilibre; établir ce théorème d'Archimède.*

2° *En considérant deux surfaces* FERMÉES PARALLÈLES *et distantes de h, on appliquera la proposition précédente à*



chacune d'elles; si alors on suppose que ces surfaces possèdent les lois régulières de la courbure, on demande d'exprimer que l'équilibre *de deux systèmes de pressions uniformément réparties sur le bloc rigide des deux surfaces est, comme il est évident*, indépendant de h. *Soient* R *et* R' *les deux rayons de courbure principaux de la surface en un point; en déduire qu'une pression normale répartie sur une surface fermée et supposée : soit proportionnelle à* $\frac{1}{R} + \frac{1}{R'}$, *soit proportionnelle à* $\frac{1}{RR'}$, laisse encore cette surface en équilibre.

Épreuve pratique. — *Un fil dont les brins rectilignes sont horizontaux ou verticaux est tiré en haut par un effort* P *de* 10^{kg} *et en bas par une force inconnue; le fil*



s'appuie sur deux rouleaux dont le coefficient de frottement pour le fil est 0,15.

Calculer :

a. Le poids Q *qui fait démarrer l'appareil vers le bas ;*

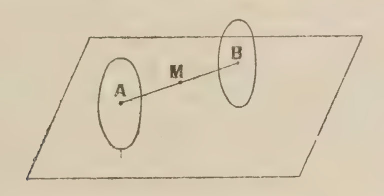
b. Le poids Q_1 *qui peut être soulevé par la charge ascendante* P ;

c. Le rapport $\frac{Q_1 - Q}{P}$. (Juin 1914.)

Bordeaux.

Épreuve théorique. — *Aux deux extrémités d'une tige homogène* AB *de masse* m *sont attachés deux disques homogènes identiques de masse* m' *pouvant librement tourner autour de* AB *qui est leur axe commun. Au milieu de* AB *est attaché un point matériel de masse* M.

Le système, qui n'est soumis à aucune force extérieure,



est lancé sur un plan horizontal sur lequel le disque B *peut librement glisser et rouler tandis que le disque* A *ne peut que rouler et pivoter.*

Trouver le mouvement du point matériel M *lorsqu'on suppose que les masses* m *et* m' *de la tige et des disques tendent simultanément vers zéro, de façon que leur rapport tende vers une limite.*

Épreuve pratique. — *On considère le solide homogène et de densité* 1 *qui, rapporté à trois axes rectangulaires* Oxyz, *est limité par les quatre surfaces*

$$x^2 = z, \qquad y = +1, \qquad y = -1, \qquad z = +1.$$

Ce solide étant au repos, on applique, en un point M *de la portion parabolique de sa surface limite et normalement à cette surface, une percussion dont la composante suivant* Oz *a une valeur donnée* k.

Calculer la force vive donnée au solide par cette répercussion. Déterminer la position M_1 *du point* M *pour laquelle*

cette force vive est aussi grande que possible et la position M_2 *pour laquelle elle est aussi petite que possible.*

(Juin 1912.)

Épreuve théorique. — *Un solide* S *est constitué par une tige homogène* AB *pliée en son milieu, de façon à consti-*

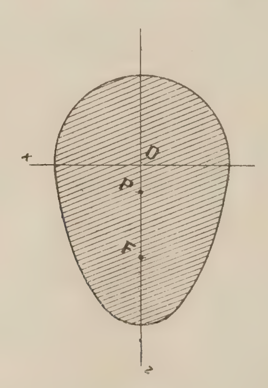


tuer un angle constant α. *Les deux extrémités* A, B *reposent sans frottement sur un plan horizontal fixe.*

1° *Supposant* $\alpha = 90°$, *étudier et discuter le mouvement du solide* S *soumis uniquement à la pesanteur;*

2° α *étant quelconque, mais supposant que la ligne* AB *soit assujettie à rester parallèle à une droite qui tourne dans le plan horizontal avec une vitesse angulaire constante donnée* ω, *étudier et discuter le mouvement du solide* S *soumis uniquement à la pesanteur.*

Épreuve pratique. — *On considère un solide de révolu-*



tion homogène et pesant dont la méridienne est constituée

par deux arcs des paraboles

$$4x^2 = 4 - z, \qquad x^2 = z + 1$$

et dont la densité est l'unité.

Ce solide est fixé par un point P *de son axe de révolution* O*z*. *Quel que soit le point* P *choisi, on part toujours de la même position initiale dans laquelle l'axe* O*z*, *dans le sens indiqué sur la figure, fait un angle de* 60° *avec la verticale descendante, et de la même rotation initiale, portée sur* O*z*, *et dont la valeur numérique est*

$$\sqrt{42(1+\sqrt{3})g},$$

g étant l'intensité de la pesanteur.

L'angle θ *de* O*z* *avec la verticale subit des oscillations périodiques dont l'amplitude varie avec le point choisi.*

Déterminer numériquement à $\frac{1}{10}$ *près le z d'un point* F *sur* O*z* *de telle sorte que l'amplitude des oscillations de* θ *soit la même, que le point fixe* P *soit en* O *ou en* F.

(Novembre 1912.)

ÉPREUVE THÉORIQUE. — *Deux plans rectangulaires tournent avec une vitesse constante et donnée* ω *autour de leur intersection qui est fixe et verticale.*

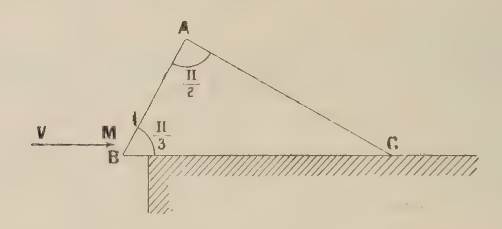
Mouvement d'une tige homogène et pesante dont les extrémités sont assujetties à glisser respectivement sur ces deux plans sans frottement et sans pouvoir les quitter.

Discussion générale.

Effectuer la discussion complète et détaillée en s'attachant surtout à l'étude du mouvement relatif de la barre pour un observateur subissant la rotation ω *et en supposant qu'à l'instant initial la rotation absolue de la tige autour de son centre de gravité est nulle. Déduire de cette discussion les différentes formes que présente la trajectoire relative de la projection horizontale du centre de gravité.*

ÉPREUVE PRATIQUE. — *Dans un plan vertical, un triangle rectangle matériel peut librement glisser par son hypoténuse sur une horizontale fixe et se trouve primitivement en repos. Un point matériel* M *mobile dans le même plan*

vertical arrive à rencontrer le côté BA *avec une vitesse horizontale* V *et en un point extrêmement voisin de* B.



Étudier complètement les différentes périodes du mouvement ultérieur du système constitué par le point et le triangle.

Les masses du point M *et du triangle sont toutes deux égales à l'unité. La vitesse* V *est égale à* $\frac{7}{\sqrt{3}}$. *L'angle* B *du triangle rectangle est* $\frac{\pi}{3}$ *et la longueur* BC *a pour valeur*

$$\frac{98}{45 g \sqrt{3}},$$

g étant l'intensité de la pesanteur. Tous les chocs qui peuvent se produire sont des chocs inélastiques.

Trouver la valeur numérique de la vitesse relative du point par rapport au triangle dans la période finale.

(Juin 1913.)

Épreuve théorique. — O_1y_1 *et* O_1z_1 *sont deux droites fixes rectangulaires : l'une* O_1y_1 *est horizontale et l'autre* O_1z_1 *n'est pas verticale.* P *et* Q *sont deux plans fixes passant par* O_1y_1.

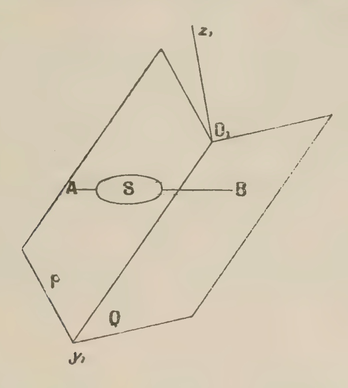
S *est un solide homogène* pesant *et de révolution dont l'axe, matériellement prolongé des deux côtés, est limité aux deux points* A *et* B.

Ce solide S *est soumis à l'ensemble des liaisons suivantes :*

1° *L'extrémité* A *se meut sans frottement dans le plan* P *et ne peut le quitter ;*

2° *L'extrémité* B *se meut, dans les mêmes conditions, dans le plan* Q ;

3° *L'axe de révolution de* S *est assujetti à faire un angle constant donné* α *avec la direction fixe* $O_1 z_1$.



Discuter le mouvement du solide. Étudier la trajectoire du centre de gravité et le mouvement autour du centre de gravité.

Épreuve pratique. — *Un solide est constitué par trois tiges concourantes rectangulaires homogènes* OA, OB, OC *de densité linéaire égale à l'unité et dont les longueurs sont* $OA = 1^m$, $OB = 2^m$, $OC = 3^m$.

La vitesse initiale du solide se compose d'une translation, égale à l'unité et parallèle à OA, *et d'une rotation issue de* O *et représentée par la diagonale du parallélépipède construit sur* OA, OB, OC.

Calculer numériquement la force vive initiale du solide.

(Novembre 1913.)

Caen.

Épreuve théorique. — I. *Une manivelle* OA *homogène et rectiligne, fixée par son extrémité* O, *est assujettie à tourner dans un plan vertical sous l'action de son poids* P *et d'une force horizontale* T, *appliquée à son extrémité* A :

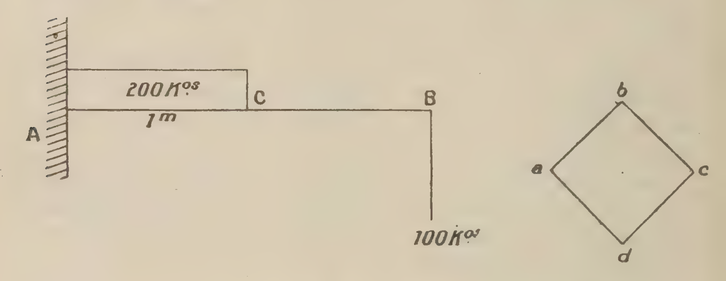
1° *On suppose d'abord que le mouvement de la manivelle est uniforme. Calculer l'expression de la force* T *en fonction de l'angle* θ *que fait* OA *avec l'horizontale. Calculer les projections de la réaction du point* O *sur l'hori-*

zontale et la verticale, et la valeur de la réaction elle-même. Quand θ *varie de* 0 *à* 2π, *déterminer les positions de la manivelle pour lesquelles la réaction est soit maximum, soit minimum.*

2° *On ne suppose plus le mouvement uniforme, mais on suppose* $T = Q \sin\theta$ (Q *désignant une force constante donnée). Former l'équation qui détermine le mouvement de la manivelle et intégrer autant que possible.*

II. *Étudier la chute libre dans le vide d'un cylindre plein homogène qui, au début du mouvement, tourne autour de la verticale du centre de gravité. On suppose qu'à ce moment-là l'axe du cylindre fait un angle de 45° avec la verticale, et l'on suppose le diamètre du cylindre égal à sa hauteur.*

Épreuve pratique. — *Une poutre encastrée* AB *porte en* B *un poids de* 100^{kg} *et de* A *en* C (AC = CB = 1^m) *une charge uniforme de* 200^{kg} :



1° *Construire le diagramme des moments fléchissants.*

2° *La section uniforme de la poutre est un carré abcd de* 8^{cm} *de côté. Déterminer les efforts moléculaires normaux dans la section* C. (Juin 1914.)

Épreuve théorique. — *Une plaque carrée, homogène et pesante, a l'un de ses côtés assujetti à rester constamment dans un plan horizontal fixe. On suppose cette liaison réalisée sans frottement :*

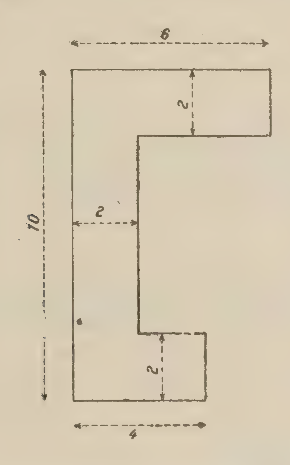
1° *Former et intégrer autant que possible les équations du mouvement de la plaque en la supposant simplement soumise à l'action de la pesanteur.*

2° *Étudier le mouvement avec les conditions initiales suivantes :*

Au début du mouvement, la plaque est verticale. Son centre de gravité est animé d'une vitesse normale au plan de la plaque et égale à V. Enfin, l'un des côtés verticaux de la plaque est animé de vitesses nulles. On supposera que ce côté est celui qui, parcouru de bas en haut, est dextrorsum par rapport au vecteur V. La plaque est au-dessus du plan horizontal de liaison.

3° *Calculer les réactions, et notamment les réactions initiales.*

Épreuve pratique. — *On considère le profil dont le croquis est ci-dessous :*



Construire, par la construction usuelle de la statique graphique, le centre de gravité du profil.

Calculer le moment d'inertie par rapport à la parallèle aux ailes menée par le centre de gravité, en ramenant ce calcul à celui d'une intégrale curviligne. L'équation du contour d'intégration sera obtenue par des mesures directes sur la figure. (Novembre 1914.)

QUESTIONS PROPOSÉES.

2287. Soient $(\alpha', \beta', \gamma')$ les coordonnées normales d'un point P sur le cercle circonscrit au triangle ABC. L'équation de la droite de Wallace correspondant à P est représentée par

$$\frac{\gamma'\alpha}{c(\alpha'+\gamma'\cos B)}+\frac{\alpha'\beta}{a(\beta'+\alpha'\cos C)}+\frac{\beta'\gamma}{b(\gamma'+\beta'\cos A)}=0.$$

T. Ono.

2288. En un point M d'une ellipse, la normale rencontre l'un des axes en N et le centre de courbure est C : le lieu du conjugué harmonique de M par rapport à N et C est une ellipse. Les deux ellipses ainsi obtenues sont semblables.

G. Fontené.

2289. On construit une ellipse par points au moyen des cercles décrits sur les axes comme diamètres. La droite menée par le centre pour obtenir quatre points M, M', ... est une asymptote de l'hyperbole homofocale à l'ellipse et passant en M.

Extension à l'espace. G. Fontené.

ERRATUM.

Page 42, 4e ligne en remontant, *au lieu de* 1545, *lire* 1505.

ACADÉMIE DES SCIENCES.

Séance du 13 mars 1916.

(Extrait des *Comptes rendus.*)

L'Académie procède par la voie du scrutin, à l'élection d'un correspondant pour la section de Géométrie, en remplacement de M. Félix Klein.

Au premier tour de scrutin, le nombre des votants étant 39,

M. de la Vallée-Poussin obtient		37 suffrages,
M. Bianchi	»	1 suffrage,
M. Fredholm	»	1 suffrage.

M. de la Vallée-Poussin, ayant réuni la majorité absolue des suffrages, est élu correspondant de l'Académie.

M. de la Vallée-Poussin, ex-professeur à l'Université de Louvain, est l'auteur de travaux profonds et très connus, en particulier sur la théorie analytique des nombres. Il remplace M. Félix Klein, radié depuis assez longtemps.

M. Klein, professeur à l'Université de Gœttingue, est l'un des 93 signataires du trop fameux *Aufruf an die Kulturwelt* (appel au monde civilisé), connu aussi sous le nom de « manifeste des intellectuels allemands », où la vérité est scandaleusement travestie.

Si grand que soit le prestige scientifique de M. Klein, l'Institut de France ne pouvait conserver au nombre de

ses correspondants un homme qui a mis ou laissé mettre son nom au bas d'un écrit abominable. D'autre part, en appelant à elle M. de la Vallée-Poussin, l'Académie, outre qu'elle consacre la valeur de ce savant, rend un hommage de haute signification à la Belgique, victime d'un des plus honteux attentats qu'ait jamais enregistrés l'histoire.

[I 19c]

SUR QUELQUES ÉQUATIONS CUBIQUES TRINOMES INDÉTERMINÉES ;

Par M. T. HAYASHI, Sendaï (Japon).

(*Traduit de l'anglais.*)

1. *Équation*

$$x^3 + z(y^2 + z^3) = 0. \tag{1}$$

En supposant z différent de zéro, divisons cette équation par z^3, et écrivons x à la place de $\frac{x}{z}$, et y à celle de $\frac{y}{z}$. Il faut alors montrer que la cubique

$$x^3 + y^2 + 1 = 0 \tag{2}$$

ne peut passer par aucun point de cordonnées rationnelles, autre que $(-1, 0)$.

Si elle passe par un tel point, soit

$$y = m(x + 1) \tag{3}$$

l'équation de la droite qui le joint au point $(-1, 0)$; m est alors un nombre rationnel. Éliminant y entre

(2) et (3), nous avons

(4) $$x^2 - x + 1 + m^3(x+1) = 0$$

ou

$$x^3 + (m^2 - 1)x + (m^2 + 1) = 0,$$

m et x étant des nombres rationnels. Donc le discriminant

$$(m^2 - 1)^2 - 4(m^2 + 1) \quad \text{ou} \quad (m^3 - 3)^2 - 12$$

doit être un carré parfait. Alors $(m^2 - 3)^2 = X^2 + 12$.

Soient

$$m = \frac{\mu}{\nu} \qquad \text{et} \qquad X = \frac{\xi}{\eta},$$

μ et ν étant des entiers premiers entre eux, de même que ξ et η. Alors

$$(\mu^2 + 3\nu^2)^2 \eta^2 = [\xi^2 + 3(2\eta)^2]\nu^4.$$

Donc tout facteur de ν^4 doit être facteur de η^2 et réciproquement; de sorte que $\eta^2 = \nu^4$. De là

$$(\mu^3 - 3\nu^3)^2 = \xi^2 + 3\eta'^2,$$

relation où η' remplace 2η. Mais l'expression quadratique $\xi^2 + 3\eta'^2$ ne peut avoir un diviseur quadratique de la forme $\mu^2 - 3\nu^2$ que si ce dernier est égal à ± 1. Pour que $\mu^2 - 3\nu^2$ puisse devenir égal à ± 1, il faut que $\xi^2 + 3\eta'^2$ devienne égal à 1 et, de là, ξ et η doivent être respectivement égaux à 1 et 0, ce qui est absurde.

On peut voir par une méthode semblable à celle qui précède que la solution de l'équation *Diophantine*

$$z^2 = x^2 + 3y^2$$

est donnée par

$$z = \lambda(a^2 + 3b^2), \qquad x = \lambda(a^2 - 3b^2), \qquad y = \lambda - 2ab.$$

Quand $m = 0$, x dans (4) ne peut pas être un nombre rationnel; et quand $m = \infty$, x dans (3) ou (4) devient -1; et de là, dans (1), $x = -z$ et $y = 0$.

Donc *le produit* $z(y^2 + z^2)$ *ne peut être un cube*, sinon pour $z = 0$, ou bien pour $y = 0$, ce qui donne $x = -z$.

Si dans (1) nous remplaçons x par $-x$ et z par 1, il vient

$$x^3 - 1 = y^2,$$

équation impossible en nombres rationnels; ce résultat se rapproche beaucoup de l'équation étudiée par Gerono, et n'est autre que celui qu'a donné Lebesgue [1].

2. *Équation*

$$(1) \qquad x^3 + z(y^2 - z^3) = 0.$$

Nous pouvons résoudre cette équation par une méthode semblable. Après la réduction à

$$(2) \qquad x^3 + y^3 - 1 = 0,$$

prenons la ligne droite

$$(3) \qquad y = m(x - 1),$$

et nous obtenons l'équation

$$(4) \qquad x^2 + x + 1 + m^2(x - 1) = 0$$

ou

$$x^2 + (m^2 + 1)x - (m^2 - 1) = 0,$$

---

(1) *Encycl. d. Math. Wiss.*, Bd. I, p. 572. GERONO, *Nouv. Ann. de Math.*, 2e série, t. IX, p. 469 et 2e série, t. X, p. 204. LEBESGUE, *Ibid.*, 1re série, t. IX, p. 178. Sur ce sujet *voir* aussi DE JONQUIÈRES, *Ibid.*, 2e série, t. XVII, p. 374.

à résoudre en nombres rationnels. De là

$$(m^2+1)^2+4(m^2-1) \quad \text{ou} \quad (m^2+3)^2-12$$

doit être un carré parfait, soit X^2. Alors

$$(m^2+3)^2 = X^2+12.$$

Soient

$$m=\frac{\mu}{\nu}, \qquad X=\frac{\xi}{\eta},$$

où μ et ν sont des entiers premiers entre eux, de même que ξ et η. Il viendra

$$(\mu^2+3\nu^2)^2\eta^2 = [\xi^2+3(2\eta)^2]\nu^4.$$

Comme plus haut nous devons avoir

(5) $$\eta^2 = \nu^4,$$

d'où

$$(\mu^2+3\nu^2)^2 = \xi^2+3(2\eta)^2.$$

La solution de cette équation est

(6) $$\xi = \mu^2-3\nu^2, \qquad \eta = \mu\nu.$$

De (5) et (6) on tire $\mu^2\nu^2=\nu^4$. Mais $\nu\neq 0$. Donc $\mu=\pm\nu$, ou $m=\pm 1$. Par conséquent, les abscisses des points d'intersection de la droite (3) et de la cubique (2) sont données par la relation (4) réduite, $x^2+2x=0$. Donc $x=0$, ou bien $x=-2$. Et, d'après (3), quand $x=0$, $y=\mp 1$; quand $x=-2$, $y=\mp 3$. Quand $m=0$, $y=0$ d'après (3) et $x=1$ d'après (2). Quand $m=\infty$, $z=1$ d'après (3) et $y=0$ d'après (2).

De là, en dehors du point $(1, 0)$, il y a sur la cubique quatre points rationnels $(0, -1)$ $(-2, -3)$ et $(0, +1)$ $(-2, 3)$. Ils tombent sur deux droites $y=\pm(x-1)$. Donc l'équation Diophantine $x^3+z(y^2-z^2)=0$ est

impossible, excepté pour

(I)	$x = z,$	$y = 0;$
(II)	$x = 0,$	$y = -z;$
(III)	$x = 0,$	$y = z;$
(IV)	$x = -2z,$	$y = -3z;$
(V)	$x = -2z,$	$y = 3z;$

ou leurs multiples. Donc le produit $z(y^2 - z^2)$ ne peut pas être un cube, à moins que

$$x = 0 \quad \text{ou} \quad y = 0 \quad \text{ou} \quad \frac{x}{-2} = \frac{y}{\mp 3} = \frac{1}{z}.$$

Si dans (1) nous remplaçons x par $-x$ et z par 1, nous avons l'équation

$$x^3 + 1 = y^2,$$

qui a été traitée déjà par Gerono. Ce dernier a prouvé qu'elle est possible lorsque, et seulement lorsque $x = 2$, $y = \pm 3$ si l'un ou l'autre des nombres x, y est supposé être un nombre premier. Mais nous avons maintenant prouvé *l'impossibilité de l'équation même si cette restriction est écartée.*

Si nous divisons l'équation (1) par y^3, supposé différent de zéro, et si la cubique plane résultante

$$x^3 + z(1 - z^2) = 0$$

est coupée par la droite $x = mz$, nous arrivons alors aussi à l'équation de Gerono

$$(-m)^3 + 1 = X^2.$$

Si dans (1) nous remplaçons y par 1, nous avons l'équation

$$x^3 = z(z^2 - 1).$$

Donc *le produit de trois entiers consécutifs ne peut*

être un cube, à moins que l'un d'eux soit nul. J'ai déjà démontré (¹) que quatre fois un nombre polynome, c'est-à-dire *les deux tiers du produit de trois entiers consécutifs ne peuvent former un cube*, comme extension d'un théorème de Legendre (²) consistant en ce qu'un nombre triangulaire différent de 1, c'est-à-dire la moitié du produit de deux entiers consécutifs ne peut être un cube.

L'impossibilité que le produit de trois entiers consécutifs soit un cube peut être aussi démontrée de la façon suivante.

Soit $x^3 = z(z^2 - 1)$. Alors, puisque z et $(z^2 - 1)$ sont premiers entre eux, si nous décomposons n en deux facteurs premiers entre eux ξ et η, et si nous posons $z = \xi^3$, nous devons alors avoir $\xi^6 - 1 = \eta^3$, ce qui est impossible, en vertu du théorème de Fermat, si ni ξ ni η n'est nul.

Par le même raisonnement, nous pouvons démontrer que *le produit de trois entiers consécutifs ne peut être la $n^{\text{ième}}$ puissance d'un entier, n n'étant pas inférieur à 2.*

3. *Produits de deux nombres consécutifs. Nombres triangulaires.* — Il est évident que *le produit de deux entiers consécutifs ne peut être un carré*, à moins que l'un de ces entiers ne soit nul. Car, si cela était, l'équation $x(x+1) = y^2$ devrait être résolue en nombres entiers. Puisque x et $x+1$ sont premiers entre eux, ils devraient tous deux être des carrés, comme on le voit en décomposant y en deux facteurs ξ et η, premiers entre eux.

(¹) *Nouv. Ann. de Math.*, 4ᵉ série, t. X, p. 83.

(²) *Théorie des nombres*, t. II, p. 11.

Ainsi, posant $x = \eta^2$, nous devons avoir $\xi^2 - 1 = \eta^2$, relation qui est seulement vérifiée par $\xi = \pm 1$, $\eta = 0$.

Le problème qui consiste à *trouver un nombre triangulaire qui soit un carré*, c'est-à-dire à trouver les solutions en nombres entiers de l'équation

$$x(x+1) = 2y^2,$$

se ramène à l'intersection de la courbe $x(x+1) = 2y^2$ et de la droite $y = m(x+1)$, et se réduit à la solution de l'équation $\xi^2 - 1 = 2\eta^2$, en nombre entiers, qui est possible et bien connue.

On peut aussi démontrer aisément que *le produit de deux entiers consécutifs ne peut pas être un cube*. Car, s'il en était ainsi, l'équation $x(x+1) = y^3$ serait résolue en nombres entiers. Puisque x et $x+1$ sont premiers entre eux, ils ne peuvent pas l'un et l'autre être des cubes. Donc, décomposant y en deux facteurs premiers entre eux ξ et η, et posant $x = \xi^3$, on doit avoir $\xi^3 + 1 = \eta^3$, relation impossible, en vertu du théorème de Fermat, si ni ξ, ni η n'est nul.

Par le même raisonnement, nous pouvons démontrer que le produit de deux entiers consécutifs quelconques ne peut être la $n^{\text{ième}}$ puissance d'un entier, n n'étant pas moindre que 2.

Plus généralement, *il n'y a pas deux entiers x et y satisfaisant à l'équation $y^{l+1} = x^m(x^n - 1)$, où* $l, m, n \geqq 1$.

4. *Équation $x^2y + z(y^2 - z^2) = 0$.* — Nous avons démontré que le produit de deux entiers consécutifs quelconques ne peut être ni un carré, ni un cube, à moins que l'un de ces entiers soit nul, et que le produit de trois entiers consécutifs quelconques ne peut être un cube, à moins que l'un de ces entiers soit nul. Nous

nous trouvons ainsi à même de déterminer si le produit de trois entiers consécutifs quelconques peut être un carré. C'est une suite directe de la dernière partie du précédent article. Mais, dans ce but nous traiterons l'équation en nombres entiers

$$(1) \qquad x^2 y + z(y^2 + z^2) = 0.$$

Elle peut aussi s'écrire sous la forme

$$(2) \qquad x^2 y + y^2 - 1 = 0,$$

en écrivant respectivement x et y au lieu de $\frac{x}{z}$ et $\frac{y}{z}$, dans l'hypothèse $z \neq 0$.

Dans la relation (2), x et y étant des nombres rationnels, nous avons à chercher le point d'intersection de la cubique (2) avec la droite

$$(3) \qquad y - 1 = mx,$$

point tel que ses deux coordonnées soient des nombres rationnels. De là nous tirons, par substitution,

$$x(mx + 1) + m(mx + 2) = 0$$

ou

$$(4) \qquad mx^2 + (m^2 + 1)x + 2m = 0.$$

Pour que cette équation quadratique en x soit résoluble en nombres entiers, le discriminant $m^4 - 6m^3 + 1$, ou $(m^2 - 3)^2 - 8$, doit être le carré d'un nombre rationnel, soit X^2. Posant alors comme ci-dessus

$$m = \frac{\mu}{\nu}, \qquad X = \frac{\xi}{\eta},$$

nous avons

$$(\mu^2 - 3\nu^2)^2 \eta^2 = [\xi^2 + 2(2\eta)^2]\nu^4.$$

De là $\eta^2 = \nu^4$, et conséquemment

$$(\mu^2 - 3\nu^2)^2 = \xi^2 + 2(2\eta)^2.$$

Mais la forme $\xi^2 + 2\eta'^2$ ne peut avoir un diviseur quadratique de la forme $\mu^2 - 3\nu^2$, à moins que cette dernière expression ne soit égale à ± 1. Pour que $\mu^2 - 3\nu^2$ devienne égal à ± 1, il faut que $\xi^2 + 2(2\eta)^2$ devienne égal à 1, et, de là, ξ et η doivent être respectivement égaux à 1 et 0, ce qui est absurde.

De là, à moins qu'on ait $m = 0$ ou $m = \infty$, résulte que le déterminant de l'équation (4) ne peut être le carré d'un nombre rationnel.

Lorsque $m = 0$, $y = 1$, d'après (3) et $x = 0$, d'après (2) et (4). De là, dans l'équation (1) $x = 0$, $y = z$. Lorsque $m = \infty$, $x = 0$, d'après (3) et (4), et $y = \pm 1$, d'après (2); de là, dans l'équation (1), $x = 0$, $y = \pm z$. Donc l'équation (1) est impossible en nombres entiers, à moins que $z = 0$, ou bien $x = 0$, $y = \pm z$.

Si nous divisons l'équation (1) par y^2, supposé différent de zéro, et si la cubique plane résultante

$$x^2 + z(1 - z^2) = 0$$

est coupée par la droite $x = mz$, nous arrivons à l'équation suivante à résoudre en nombres rationnels, ce qui est impossible :

$$m^4 + 4 = X^2.$$

Si dans (1) nous remplaçons y par 1, nous avons l'équation $x^2 = z(z^2 - 1)$. De là *le produit de trois entiers consécutifs ne peut être un carré*, à moins que l'un de ces entiers ne soit nul.

5. *Produits de quatre entiers consécutifs.* — Nous avons établi que le produit de deux ou trois entiers consécutifs quelconques ne peut être ni un carré, ni un cube, à moins que l'un de ces entiers ne soit nul.

Le produit de quatre entiers consécutifs quelcon-

ques ne peut non plus être, ni un carré, ni un cube.

Pour le démontrer, nous emploierons, d'après Lucas, l'identité

$$a(a+r)(a+2r)(a+3r)+r^4=(a^2+3ar+r^2)^2.$$

Soit $r=1$; alors

(1) $$a(a+1)(a+2)(a+3)+1=(a^2+3a+1)^2.$$

Supposons que $a(a+1)(a+2)(a+3)$ soit un carré, non nul.

La différence des carrés de deux nombres consécutifs, sauf $(\pm 1, 0)$ et $(0, \pm 1)$ ne peut être en valeur absolue inférieure à 3. Pour $(0, \pm 1)$ la différence est -1, ce qui ne s'applique pas à notre cas. Pour $(\pm 1, 0)$ nous devons avoir

$$a^2+3a+1=\pm 1,$$

ou

$$a=0, -1, -2, -3.$$

Donc le produit en question ne peut être un carré à moins que l'un des quatre entiers ne soit nul [1].

Si, dans (1), $a(a+1)(a+2)(a+3)$ est un cube, nous avons l'équation de Gerono citée plus haut $x^3+1=y^2$, qui est vérifiée seulement par l'une ou l'autre des solutions

$$x=0, \quad y=\pm 1 \quad \text{ou} \quad x=2, \quad y=\pm 3.$$

Donc nous devons avoir

$$a^2+3a+1=\pm 1 \quad \text{ou} \quad a=0, -1, -2, -3,$$

---

[1] E. Lucas, *Théorie des nombres*, p. 53.

ou bien

$$a^2 + 3a + 1 = \pm 3,$$

ce qui est impossible pour toute valeur entière de a.

Donc le produit $a(a+1)(a+2)(a+3)$ ne peut être un cube que si l'un des quatre entiers est nul.

Gerono démontre en outre que l'équation

$$x^m + 1 = y^n$$

est possible en entiers positifs lorsque, et seulement lorsque, on a

$$m = 3, \qquad x = 2, \qquad n = 2, \qquad y = 3,$$

si x ou y est supposé être un nombre premier. Nous pouvons démontrer par le même raisonnement que lorsque a est choisi de telle sorte que $a^2 + 3a + 1$ soit un nombre premier, le produit $a(a+1)(a+2)(a+3)$ ne peut être une puissance quelconque d'un entier, alors que nous avons montré plus haut que ce produit ne peut être ni un carré ni un cube pour aucune valeur de a.

J'ai établi que le produit de deux, trois ou quatre entiers consécutifs quelconques ne peut être ni un carré, ni un cube, à moins que l'un de ces entiers ne soit nul. Ainsi se présente naturellement la question que voici : *Le produit d'un nombre quelconque d'entiers consécutifs peut-il être un carré ou un cube? Et si cela peut être, pour quels entiers?*

J'ai aussi trouvé que le produit de deux entiers consécutifs ne peut pas être un carré, que celui de trois ne peut pas être un cube, et que celui de quatre ne peut être un carré, et par conséquent n'est pas la quatrième puissance d'un entier. Et cette nouvelle question se présente aussi naturellement : *Le produit*

de n entiers consécutifs quelconques peut-il être la $n^{\text{ième}}$ *puissance d'un entier?*

Ces questions semblent être très intéressantes quand on les rapproche du théorème de Liouville en vertu duquel le produit d'entiers consécutifs

$$m(m+1)(m+2)\ldots(m+n-1)$$

ne peut être une puissance exacte *si dans la suite des facteurs se rencontre un nombre premier* [1].

6. *Équation* $x^2y+z(y^2+z^2)=0$. — Au n° 4 ci-dessus, j'ai étudié l'équation $x^2y+z(y^2-z^2)=0$, et je suis maintenant amené à traiter de la suivante

$$(1) \qquad x^2y+z(y^2+z^2)=0,$$

ce qui ne peut se faire par les mêmes moyens.

L'équation (1) peut s'écrire

$$(2) \qquad x^2y+y^2z+z^3=0,$$

et nous y pouvons supposer que x, y, z ne sont pas tous nuls et n'ont pas de facteur commun.

Soient u, v, w les plus grands communs diviseurs de (y, z), (z, x), (x, y), respectivement. Nous pouvons poser

$$x=vwx', \qquad y=wuy', \qquad z=uvz'.$$

Substituant ces valeurs de x, y, z dans l'équation (2), nous avons

$$(3) \qquad vw^3x'^2y'+w^2u^2y'^2z'+u^2v^2z'^3=0.$$

---

[1] Liouville, *Sur le produit* $m(m+1)(m+2)\ldots(m+n-1)$ (*Journal de Math.*, t. II, 1857, p. 277). Consulter aussi une Note de Moreau (*Nouvelles Annales*, 2e série, t. II, 1872, p. 172) d'après laquelle le théorème est dû à Mathieu (question 441 des *Nouvelles Annales*).

On voit que le premier terme $vw^3x'^2y'$ doit être divisible par u^2. Mais u n'a pas de facteur commun avec v, w et x', de sorte que y' est divisible par u^2. En outre, le dernier terme $u^2v^2z'^3$ est divisible par y'. Mais y' n'a pas de facteur commun avec v et z', de sorte que u^2 est divisible par y'. De là

$$(4) \qquad y' = \pm u^2.$$

Substituant cette valeur de y' dans l'équation (3), nous avons

$$(5) \qquad \pm vw^3x'^2 + w^2u^4z' + v^2z'^3 = 0.$$

Le dernier terme $v^2z'^3$ doit être divisible par w^2; mais w n'a pas de diviseur commun avec v, ni avec z', de sorte que

$$(6) \qquad w = \pm 1.$$

Substituant cette valeur de w dans l'équation (5), nous avons

$$(7) \qquad \pm vx'^2 + u^4z' + vz'^3 = 0.$$

Le terme du milieu u^4z' doit être divisible par v; mais v n'a pas de diviseur commun avec u, de sorte que z' doit être divisible par v. En outre le premier terme $\pm vx'^2$ doit être divisible par z'. Mais z' et x' sont premiers entre eux, de sorte que v doit être divisible par z'. De là

$$(8) \qquad z' = \pm v.$$

Substituant cette valeur de z' dans l'équation (7), nous avons

$$\pm x'^2 \pm (u^4 + v^4) = 0;$$

d'où

$$(9) \qquad x'^2 = u^4 + v^4;$$

et les signes, dans les relations (4), (6), (8), doivent être combinés comme il suit :

$$(+ + -),\quad (+ - +),\quad (- + +),\quad (- - -).$$

Ainsi la question est ramenée à la résolution de l'équation (7), qui n'a d'autre solution que $u = 0$, $v = 0$ et $x' = 0$, ce qui s'accorde avec les conclusions de B. Frenicle de Bessy [1].

Donc l'équation (1) n'a de solution que si l'une au moins des quantités x, y, z est nulle.

Si nous divisons l'équation (1) par y^3, supposée non nulle, et si la cubique plane résultante $x^2 + z(1 + z^2) = 0$ est coupée par la droite $x = mz$, nous arrivons alors à la résolution en nombres rationnels de l'équation $m^4 - 4 = X^3$, qui est impossible.

7. *Équations* $x^3 = yz(y + z)$, $x^2y + y^2z + z^2x = 0$. — Je m'occuperai maintenant de l'équation

$$(1) \qquad x^3 = yz(y + z).$$

On peut la traiter d'une façon spéciale comme il suit. Supposant z différent de zéro, divisons par z^3, et remplaçons $\frac{x}{z}$ par x et $\frac{y}{z}$ par y. Alors

$$(2) \qquad x^3 = y(y + 1),$$

x et y étant ici des nombres rationnels, tandis que x, y et z dans (1) sont des entiers.

De même que ci-dessus, considérant (2) comme l'équation d'une cubique, le point $(0, -1)$ tombe sur

---

(1) *Encycl. des Sc. math. pures et appl.*, t. I, vol. III, p. 36. Pour plus de détails, *voir* B. Frenicle de Bessy, *Traité des triangles rectangles en nombres*, p. 1676.

cette courbe. Nous prendrons alors la ligne droite

$$y + 1 = mx, \tag{3}$$

et nous chercherons les points d'intersection de la droite et de la cubique dont les coordonnées sont des nombres rationnels. Éliminant y entre (2) et (3), il vient

$$x^2 = m^2 x - m.$$

Pour que cette équation quadratique en x soit vérifiée par des valeurs rationnelles de m et de x, il faut que son déterminant

$$m^4 - 4m \tag{4}$$

soit le carré d'un nombre rationnel. Cependant, cela ne peut être, comme nous allons le voir.

Le professeur Hurwitz ([1]) a montré que les deux équations

$$x^m y^n + y^m z^n + z^m x^n = 0$$

et

$$x^{m^2-mn+n^2} + y^{m^2-mn+n^2} + z^{m^2-mn+n^2} = 0$$

sont l'une et l'autre à la fois, ou résolubles, ou non résolubles en entiers différents de zéro.

Si nous particularisons en posant $m = 2$, $n = 1$, nous voyons que la première équation

$$x^2 y + y^2 z + z^2 x = 0 \tag{5}$$

est insoluble, car la dernière

$$x^3 + y^3 + z^3 = 0$$

l'est elle-même en vertu du théorème de Fermat. Essayons maintenant de résoudre l'équation (5) par la méthode que nous venons d'employer souvent ici-même.

([1]) *Math. Ann.*, Bd LXV, 1908, p. 428.

Supposant z différent de zéro, divisons par z^3 et remplaçons $\frac{x}{z}$ par x, et $\frac{y}{z}$ par y; nous avons alors

$$(6) \qquad x^2y + y^2 + x = 0,$$

x et y étant maintenant des nombres rationnels, tandis que x, y, z dans (5) sont tous des entiers.

Considérant (6) comme l'équation d'une cubique, le point (0, 0) tombe sur cette courbe. Prenons la droite

$$(7) \qquad y = mx$$

et essayons de trouver les points d'intersection à coordonnées rationnelles de cette droite et de la cubique. Éliminant y entre (6) et (7), nous avons

$$mx^2 + m^2x + 1 = 0,$$

équation quadratique en x dont le discriminant $m^4 - 4m$ doit être le carré d'un nombre rationnel. Mais cela ne peut être; car autrement l'équation (5) deviendrait résoluble, ce qui est absurde. Ce discriminant n'est autre que le discriminant (4). Donc l'équation (2) est insoluble en nombres rationnels, et par suite l'équation (1) est insoluble en nombres entiers, si l'une au moins des inconnues n'est pas nulle.

Ed. Lucas [1] a démontré qu'une condition nécessaire et suffisante pour que l'équation

$$(8) \qquad x^3 + y^3 - Az^3 = 0$$

soit résoluble en nombres entiers est que A appartienne à la forme $ab(a+b)$ préalablement débarrassée de

(1) *Nouv. Ann. de Math.*, 2e série, t. XVII, 1878, p. 425.

ses facteurs cubiques, c'est-à-dire qu'on ait

$$(9) \qquad \mathrm{A}c^3 = ab(a+b),$$

a, b, c étant des entiers.

Posons $\mathrm{A}=1$; alors (8) n'est pas résoluble, de sorte que la relation $c^3 = ab(a+b)$, qui n'est autre que (1), est impossible en nombres entiers.

Ainsi l'équation (1) est impossible. Remplaçons z par $y+1$; elle devient alors

$$y(y+1)(2y+1) = x^3 \qquad \text{ou} \qquad 6\,\frac{y(y+1)(2y+1)}{6} = x^3$$

En employant le raisonnement par lequel nous avons démontré ci-dessus que le produit de deux ou de trois entiers consécutifs quelconques ne peut pas être la $n^{\text{ième}}$ puissance d'un entier ($n \geqq 2$), nous pouvons démontrer l'impossibilité de l'équation

$$y(y+1)(2y+1) = x^3$$

en nombres entiers, et aussi l'impossibilité de l'équation

$$y(y+1)(2y+1) = x^n \qquad (n \geqq 2),$$

en nombres entiers, puisque deux quelconques des trois nombres y, $y+1$, $2y+1$ sont premiers entre eux.

De là, *le sextuple de la somme des carrés des m premiers nombres entiers ne peut être la $n^{\text{ième}}$ puissance d'un entier.*

D'après le théorème de Lucas cité plus haut, la relation

$$(10) \qquad 3c^3 = ab(a+b)$$

ne peut être vérifiée, puisque l'équation

$$x^3 + y^3 - 3z^3 = 0$$

est impossible. Si dans (10) nous posons $b = a + 1$, nous avons

$$3c^3 = a(a+1)(2a+1).$$

De là, *le triple de la somme des carrés des m premiers nombres entiers ne peut être la $n^{ième}$ puissance d'un entier* ($n \geqq 2$).

On sait que la somme des cubes des m premiers nombres entiers est égale au carré $\left[\frac{m(m+1)}{2}\right]^2$. Mais elle n'est pas un cube, puisque $\frac{m(m+1)}{2}$ n'en est pas un, d'après la démonstration de Legendre.

8. *Équation* $x^3 = z(x^2 \pm y^2)$. — Nous pouvons traiter quelques autres équations cubiques trinomes indéterminées et homogènes par les méthodes appliquées ici. Les équations étudiées ci-dessus sont toutes impossibles en général. Les suivantes sont au contraire possibles :

$$x^3 = z(x^2 \pm y^2). \tag{1}$$

En effet, comme dans ce qui précède, prenant la droite $y = m(x-1)$ et la cubique $x^3 = x^2 \pm y^2$, nous avons

$$x^2 = \pm m^2(x-1);$$

de sorte que $x - 1$ ou $1 - x$ doit être un carré.

Si $x - 1$ est un carré a^2 (a rationnel), on a

$$x = 1 + a^2, \qquad m = \pm \frac{1+a^2}{a}, \qquad y = \pm \frac{a^2(1+a^2)}{a}.$$

De là, remplaçant a par $\frac{\alpha}{\beta}$, nous trouvons pour x, y, z, dans l'équation (1), avec le signe $+$,

$$x = \beta(\beta^2 + \alpha^2), \qquad y = \alpha(\beta^2 + \alpha^2), \qquad z = \beta^3.$$

Un résultat semblable se présente dans le cas où $1 - x$ est un carré.

Si dans l'équation (1) on prend le signe —, les valeurs de x, y, z sont respectivement

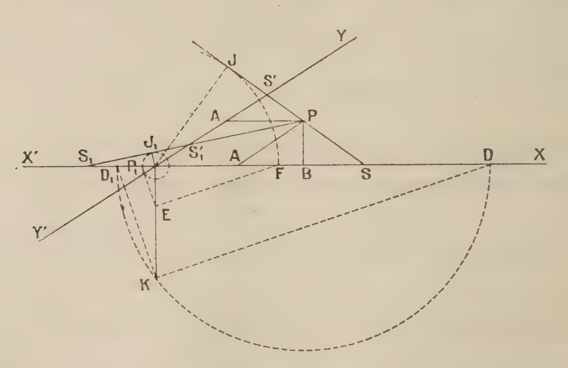
$$x = \beta(\beta^2 - \alpha^2), \qquad y = \alpha(\beta^2 - \alpha^2), \qquad z = \beta^3.$$

[K'1]

SOLUTION DU PROBLÈME DE PAPPUS GÉNÉRALISÉ;

PAR M. JOSEPH JOFFROY,
Professeur honoraire.

Ce problème peut s'énoncer ainsi : dans un angle *quelconque* XOY ou ω inscrire une droite SS' de longueur l donnée et passant par P, point de la bissectrice de ω. Jusqu'à ce jour le cas particulier de ω droit a été seul résolu par l'emploi d'une équation du



deuxième degré. P (*voir* la figure) est déterminé par le losange A'OAP de côté a. Posons $OS = x$, $OS' = y$.

Les triangles semblables OS′S, APS donnent

$$(1) \qquad \frac{y}{a} = \frac{x}{x-a} \qquad \text{ou} \qquad xy = a(x+y).$$

Dans le triangle OSS′, on a

$$x^2 + y^2 - 2xy\cos\omega = l^2$$

ou

$$(2) \qquad (x+y)^2 - 2xy(1+\cos\omega) = l^2.$$

Éliminant xy entre (1) et (2), j'obtiens

$$(\text{E}) \qquad (x+y)^2 - 2a(1+\cos\omega)(x+y) - l^2 = 0,$$

équation du deuxième degré en $x+y$ dont la racine positive, qui convient à mon problème, est

$$x + y = a(1+\cos\omega) + \sqrt{a^2(1+\cos\omega)^2 + l^2} = \text{A}.$$

J'ai donc

$$x + y + \text{A}$$

et

$$xy = \text{A}a.$$

On sait construire $x+y$ et $\sqrt{xy}$, puis x et y. On calcule x et y qui sont les racines de

$$(\text{E}') \qquad z^2 - \text{A}z + \text{A}a = 0.$$

$x = \text{OS}$ étant connu, la sécante SS′ est déterminée. La sécante symétrique de celle-ci par rapport à la bissectrice est la seconde solution. La valeur absolue de la racine négative de l'équation (E) déterminerait les deux autres droites, solutions, l'une dans l'angle YOX′, l'autre dans XOY′ : on le vérifiera en supposant, comme je l'ai fait, le problème résolu.

Si j'avais éliminé x ou y au lieu de xy ou $x+y$, j'aurais obtenu une équation complète du quatrième degré et j'en aurais conclu que le problème général de

Pappus ne peut pas être résolu *graphiquement :* c'est ce qui a été cru jusqu'à ce jour. Quant aux quatre racines de cette équation du quatrième degré en x ou en y, leurs valeurs sont celles qui satisfont à l'équation (E). En résolvant l'équation du quatrième degré on obtiendrait des expressions égales à celles que j'ai trouvées ci-dessus, mais bien plus compliquées (ce serait un exercice de concours).

Voici une solution de mon problème plus élégante que ma précédente.

Soit $OJ = R$ perpendiculaire à la sécante SS' qu'il s'agit de placer. J'ai encore

$$xy = a(x+y), \qquad (x+y)^2 - 2xy(1+\cos\omega) = l^2.$$

J'ai aussi

$$xy\sin\omega = R\,l,$$

double du triangle OSS'.

Éliminant xy et $x+y$ entre ces trois équations, j'obtiens

$$\text{(J)} \qquad lR^2 - 2a^2\sin\omega(1+\cos\omega)R - a^2 l\sin^2\omega = 0,$$

$$R = \frac{a\sin\omega}{M}\left[a(1+\cos\omega) \pm \sqrt{a^2(1+\cos\omega)^2 + l^2}\right].$$

La valeur positive de R convient pour la construction de SPS'. Sa valeur négative convient pour la construction de la sécante $S_1S'_1P$, solution dans YOX' (on le vérifiera). J'ai donc, si j'appelle R_1 la perpendiculaire OJ_1 à cette sécante

$$R_1 = \frac{a\sin\omega}{l}\left[-a(1+\cos\omega) + \sqrt{a^2(1+\cos\omega)^2 + l^2}\right],$$

avec

$$R = \frac{a\sin\omega}{l}\left[a(1+\cos\omega) + \sqrt{a^2(1+\cos\omega)^2 + l^2}\right].$$

J'abaisse PB perpendiculaire à OX : j'ai

$$a \sin B = PB = b, \qquad a(1 + \cos\omega) = OB = c,$$

et je puis écrire

$$R = \frac{b}{l}\left[c + \sqrt{c^2 + l^2}\right], \qquad R_1 = \frac{b}{l}\left[-c + \sqrt{c^2 + l^2}\right].$$

On voit que R, R_1 n'exigent que la construction d'un seul triangle rectangle et de deux quatrièmes proportionnelles.

Construction la plus rapide de R, R_1. $OK = l$ est perpendiculaire à OX, BK vaut $\sqrt{c^2 + l^2}$, OD vaut $c + \sqrt{c^2 + l^2}$, OD_1 vaut $-c + \sqrt{c^2 + l^2}$, OE égale $PB = b$. EF est parallèle à KD, EF_1 est parallèle à KD_1. La quatrième proportionnelle OF vaut R, la quatrième proportionnelle OF_1 vaut R_1. De O je décris un cercle de rayon R, un cercle de rayon R_1. De P je leur mène les tangentes PJ, PJ_1 et leurs symétriques par rapport à la bissectrice de XOY. Les quatre tangentes sont les quatre solutious du problème de Pappus que j'ai généralisé et résolu grâce à un changement de variable, grâce à une idée bien simple, celle de remplacer $x^2 + y^2$ par $(x + y)^2 - 2xy$!

[P'4]

AU SUJET D'UNE NOTE DE M. FONTENÉ;

Par M. R. BRICARD.

Dans une Note récente (*N. A.*, 1915, p. 515), M. Fontené a proposé l'étude d'une surface définie de la manière suivante : Étant donnés six points dans

l'espace, à tout point M correspond un point M' tel que toutes les quadriques du réseau ponctuel déterminé par les six premiers points et par le point M passent aussi, en vertu du théorème de Lamé, par le point M'. M. Fontené observe que les droites MM' forment une congruence, à savoir la congruence des cordes de la cubique gauche (Γ) qui passe par les six points, et que sur toute droite de cette congruence les couples (M, M') sont en involution. La surface dont il s'agit est le lieu des points doubles de ces involutions.

Soient (D) l'une des droites de la congruence dont il s'agit et P un point double de l'involution correspondante. Le point P est tel que toutes les quadriques qui contiennent ce point et les six points donnés sont tangentes en P à (D), ou ont un point double en P. On peut dire aussi que toutes les quadriques tangentes en P à (D), ou ayant un point double en P, et passant par cinq des points donnés, passent par le sixième. Ainsi le cône du second degré qui a son sommet en P et qui passe par les cinq premiers points passe par le sixième point. Autrement dit, le point P est sommet d'un cône de second ordre passant par les six points.

Réciproquement, tout point qui est sommet d'un cône du second degré passant par les six points est un point P, car il passe par ce point une corde de la cubique gauche (Γ) et ce point est un point double de l'involution qui a eu lieu sur cette droite.

La surface signalée par M. Fontené n'est donc autre que la surface, lieu des sommets des cônes du second ordre passant par six points donnés. Cette surface est bien connue sous le nom de *surface de Weddle*. Elle est du quatrième ordre. Elle contient la cubique gauche (Γ) qui passe par les six points, puisqu'un cône ayant son sommet sur la cubique et ayant

la cubique pour directrice est un cône du second degré. Une droite de la congruence est une corde de cette cubique et rencontre encore la surface en deux points P et Q, sommets de deux cônes du second degré passant par les six points, et points doubles de l'involution sur la droite; comme les points d'appui de la droite sur la cubique forment un couple de l'involution, les deux points P et Q forment avec ces deux points d'appui une division harmonique.

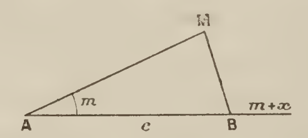
La surface de Weddle contient évidemment les quinze droites joignant deux à deux les six points donnés; évidemment aussi, sur chacune de ces droites qui sont des cordes de la cubique gauche (Γ), l'involution (M, M') est illusoire, puisque les quadriques du réseau qui passent par un point de la droite contiennent la droite tout entière.

Il est clair aussi que la surface contient les dix droites dont chacune est l'intersection du plan contenant trois des six points avec le plan contenant les trois autres. Ainsi, *quand on se donne le point* M *sur une des droites en question, les quadriques du réseau ponctuel déterminé par les six points donnés et par ce point sont tangentes en* M *à une même droite* (D), *corde de la cubique gauche* (Γ) *passant en* M; le point M est un point P sur cette droite (D); le point Q, second point double de l'involution sur la droite, est le conjugué du point M par rapport aux points d'appui de la droite sur la cubique.

L'étude de la surface de Weddle a occupé divers géomètres, parmi lesquels on peut citer Cayley, R. Sturm, Schottky, G. Humbert.

CORRESPONDANCE.

M. **A. Pellet**. — *Au sujet de la question* 2118. — Dans sa solution de cette question, une légère inadvertance a fait discuter à M. Vaulot (1915, p. 574) une



courbe tout autre que celle que j'indiquais. Pour fixer les idées, supposons e et m positifs dans l'équation

$$x - e\sin(m + x) = 0,$$

et inférieurs, e à $\frac{\pi}{2}$, m à π. On voit que l'angle en M est égal à x, et $\mathrm{AM} = \frac{x}{\sin x} = \rho$. La relation

$$\operatorname{tang}\frac{A - B}{2} = \frac{a - b}{a + b}\operatorname{tang}\frac{A + B}{2},$$

si

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B},$$

donne ensuite

$$\operatorname{tang}\left(x + \frac{m}{2}\right) = \frac{\rho + e}{\rho - e}\operatorname{tang}\frac{m}{2}.$$

Lorsque x varie de 0 à e, le second membre va en diminuant, tandis que le premier va en croissant; donc en attribuant à x une valeur entre 0 et e dans le second membre (x_0), la valeur correspondante de $\operatorname{tang}\left(x + \frac{m}{2}\right)$

donne pour x une quantité x_1, et la racine de l'équation est comprise entre x_0 et x_1 ; on a donc ainsi un moyen pour l'approcher indéfiniment. En particulier, en faisant $x_0 = e$,

$$\operatorname{tang}\left(x_1 + \frac{m}{2}\right) = \cot^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{e}{2}\right) \operatorname{tang} \frac{m}{2},$$

et la racine est comprise entre x_1 et e.

M. **d'Ocagne**. — *Au sujet des enveloppes de cercles et des caustiques.* — Le théorème général sur les centres de courbure des enveloppes de cercles, qui figure dans une Note récente de M. Goormaghtigh (*Nouvelles Annales*, 1916, p. 5), est, on le reconnaît sans peine, identique à celui qui constitue la seconde partie de la question **2169**, dont une démonstration géométrique extrêmement simple vient de paraître dans ce Recueil (1915, p. 435; note au bas de la page) et qui provient d'une Note que j'ai publiée naguère dans les *Annales des Ponts et Chaussées* (2e semestre 1888, p. 76).

On peut remarquer aussi que la construction par points des caustiques par réfraction, obtenue par M. Goormaghtigh (*loc. cit.*, p. 30), est celle même qui se rencontre dans les *Principes et Développements de Géométrie cinématique* de Mannheim (p. 66). Cette construction est, au reste, moins simple que celle de Cornu, dont une démonstration géométrique a paru dernièrement dans ce Recueil (1915, p. 508).

NÉCROLOGIE.

F. FARJON.

Nous venons d'apprendre avec un profond regret le décès d'un fidèle collaborateur des *Nouvelles Annales* depuis de longues années.

Ferdinand Farjon est mort accidentellement à Boulogne-sur-Mer, le 25 mars dernier. Ancien élève de l'École Polytechnique (promotion de 1860), il occupait une importante situation industrielle, avait été député du Pas-de-Calais, et était président de la Chambre de Commerce de Boulogne.

Il avait un goût prononcé pour les Sciences mathématiques; il y montrait des qualités très personnelles et une sagacité remarquable.

Récemment encore (numéro de février 1916), nous avions inséré quelques lignes intéressantes de lui, dans notre « Correspondance ».

En exprimant à sa famille nos condoléances les plus sincères, nous sommes assurés d'être les fidèles interprètes de nos lecteurs. Mais aux regrets que cause la disparition d'une belle intelligence vient s'ajouter, pour nous, la tristesse de perdre un ami personnel, dont les hautes qualités morales forçaient l'admiration de ceux qui l'ont connu.

C.-A. L.

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES.

606 et 607.

(1862, p. 29 et 30.)

606. *En ordonnant le discriminant* Δ *de l'équation*

$$ax^4 + 4bx^3 + 6cx^2 + 4dx + e = 0,$$

suivant les puissances de e, *posant*

$$\Delta = Ae^3 + 3Be^2 + 3Ce + D;$$

démontrer qu'on a

$$\begin{aligned} &A^2D^2 - 6ABCD + 4AC^3 + 4B^2D - 3B^2C^2 \\ &= -729(a^2d + 2b^3 - 3abc)^2 \\ &\quad \times (a^2d^2 - 6abcd + 4ac^3 + 4b^2d - 3b^2c^2)^3. \end{aligned}$$

Michael Roberts.

607. *Soit* s_r *la somme des puissances* r *des racines de l'équation*

$$ax^5 + 5bx^4 + 10cx^3 + 10dx^2 + 5ex + f = 0.$$

Posons

$$a^6 \times \begin{vmatrix} s_0 & s_1 & s_2 & s_3 \\ s_1 & s_2 & s_3 & s_4 \\ s_2 & s_3 & s_4 & s_5 \\ s_3 & s_4 & s_5 & s_6 \end{vmatrix} = Pf^2 + 2Qf + R,$$

alors P, Q, R *ne renferment pas* f. *Si*

$$\begin{vmatrix} s_0 & s_1 & s_2 \\ s_1 & s_2 & s_3 \\ s_2 & s_3 & s_4 \end{vmatrix} = 0,$$

démontrer qu'on a la relation suivante

$$Q^2 - PR = 0.$$

MICHAEL ROBERTS.

SOLUTION

Par M. H. BROCARD.

Ces deux questions sont tirées d'un article *Sur quelques théorèmes d'algèbre* par Michael Roberts, publié dans les *Annales de Tortolini*, t. IV, 1861, p. 51.

Cet article contient la démonstration désirée ou les indications nécessaires à la solution.

Le lecteur voudra bien s'y référer.

851.

(1868, p. 138.)

Trouver la suite des fonctions de Sturm pour l'équation qui donne tang $\frac{a}{n}$ *quand on connait* tang a.

G. DARBOUX.

SOLUTION

Par M. H. BROCARD.

L'étude proposée a été traitée ici.

1° 1880, p. 76-81 : *Sur une application de la méthode de Sturm;* par C. BIEHLER ;

2° 1880, p. 149-152 : *Sur une classe d'équations algébriques dont toutes les racines sont réelles;* par C. BIEHLER ;

3° 1880, p. 224-236; *Sur quelques propriétés des équations algébriques qui ont toutes leurs racines réelles;* par E. LAGUERRE ;

4° 1887, p. 5-9; *Sur l'équation de degré m qui donne* tang $\frac{a}{m}$ *lorsque l'on connaît* tang a; par C. BIEHLER.

La question 851 n'ayant pas été rappelée de façon particulière dans les quatre articles susmentionnés, a dû être considérée jusqu'à présent comme non résolue ; mais il est certain que ceux-ci renferment tous les éléments voulus pour la solution désirée.

1359.

(1881, p. 144.)

ABC *étant un triangle donné, on le coupe par une sécante qui détermine sur ses côtés ou leurs prolongements six segments tels que le produit de trois d'entre eux non consécutifs soit constant : Trouver l'enveloppe de la transversale.* BARBARIN.

SOLUTION
Par L'AUTEUR.

ABC étant pris pour triangle de référence, la transversale

$$ux + vy + wz = 0$$

a pour équation tangentielle

$$(1)\qquad \Sigma U^2(V + W) - KUVW = 0,$$

en posant pour abréger

$$U = \frac{u}{a},\quad V = \frac{v}{b},\quad W = \frac{w}{c},\quad X = ax,\quad Y = by,\quad Z = cz,$$

et appelant K une constante. L'équation (1) peut se ramener à la forme plus commode

$$(2)\qquad (U + V)(V + W)(W + U) - K'UVW = 0$$

qui accuse une courbe de troisième classe tangente aux trois côtés du triangle et aux trois parallèles menées par les sommets.

1531.

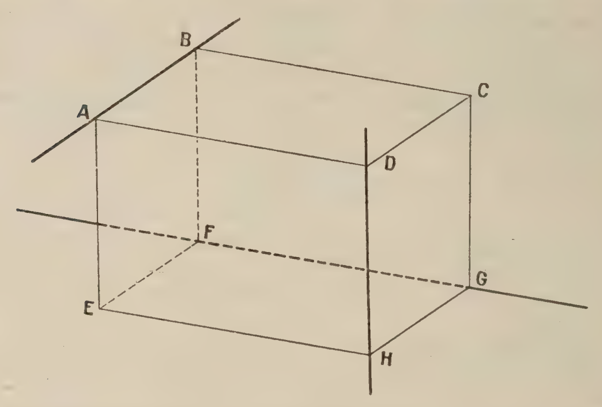
(1885, p. 248; 1915, p. 472.)

Le parallélépipède construit sur trois génératrices quelconques d'un hyperboloïde à une nappe a un volume constant. GENTY.

DEUXIÈME SOLUTION
Par M. J. LEMAIRE.

Soit ABCDEFGH le parallélépipède construit sur les trois génératrices de même espèce AB, FG, DH d'un hyperboloïde à une nappe; il suffit évidemment de prouver que son volume

ne change pas quand on remplace une seule des trois génératrices, DH par exemple, par une autre de même espèce; celle-ci doit couper AD et GH, qui sont des génératrices de l'autre



espèce, en des points D′ et H′. AB et FG restant fixes, il en est de même de GH et AD, les points D′ et H′ déterminent sur AD et GH des divisions homographiques, et l'on a une relation de la forme

$$\lambda . \overline{AD'} . \overline{GH'} + \mu \, \overline{AD'} + \nu . \overline{GH'} + \rho = 0.$$

En supposant que D′ vienne en A, puis H′ en G, puis D′ et H′ en D et H, on obtient

$$\overline{AD'} . \overline{GH'} = \overline{AD} . \overline{GH}.$$

Le parallélogramme EFGH conserve donc, quand on fait varier la génératrice DH, un angle fixe en G compris entre des côtés dont le produit est constant; par suite son aire est constante; et comme la hauteur correspondante du parallélépipède est invariable, son volume reste bien constant.

1551.

(1885, p. 488.)

Trouver une courbe plane telle que le produit des distances d'un point fixe à deux de ses tangentes parallèles soit constant. Les coniques sont des cas particuliers.

BARBARIN.

SOLUTION

Par l'AUTEUR.

La question n'est pas déterminée. Le point fixe étant pris pour origine, la tangente mobile

$$x \cos\alpha + y \sin\alpha = a\, f(\alpha)$$

satisfait à la condition imposée

$$\mathrm{OP} \times \mathrm{OP}' = \pm a^2$$

si

$$(1) \qquad f(\alpha)\, f(\alpha + \pi) = \pm 1.$$

Il y a évidemment une infinité de fonctions résolvant cette équation. Avec le signe positif, la fonction $f(\alpha)$ est périodique (période 2π). Des solutions particulières étant trouvées, toutes leurs puissances rationnelles ou non, et leurs produits ou quotients sont aussi des solutions. Le problème comporte des courbes algébriques, par exemple le cercle pour

$$f(\alpha) = 1,$$

les coniques pour

$$f(\alpha) = \sqrt{\mathrm{K}\cos^2\alpha + \sin^2\alpha} - \sqrt{\mathrm{K} - 1}\cos\alpha,$$

mais aussi des courbes transcendantes, par exemple celle qui correspond à

$$f(\alpha) = e^{\sin\alpha}$$

et qui a la forme de la *méridienne de l'œuf*.

Avec le signe négatif, la fonction $f(\alpha)$ est encore périodique. Exemple :

$$f(\alpha) = \operatorname{tang}\frac{\alpha}{2}\cdot$$

La famille des courbes proposées a une liaison remarquable avec les courbes appelées *anallagmatiques* par Moutard ; ce sont celles qui ont pour podaire par rapport à l'origine une anallagmatique ; on peut donc les désigner par le terme d'*antipodaires d'allagmatiques ;* la courbe du dernier exemple est une *antipodaire de strophoïde*.

1678.

(1894, p. 4.)

Lieu des sommets et enveloppe des axes des paraboles conjuguées par rapport à un triangle fixe.

A. Cazamian.

Deuxième Solution (1)

Par M. H. Brocard.

Cette question paraît malaisée à traiter par l'analyse, en raison de la complication des calculs et de la difficulté de dégager les résultats. Cependant elle devient plus abordable après intervention de quelques propositions classiques, énoncées à diverses reprises dans ce Journal.

Certaines propriétés remarquables, particulièrement utiles à l'étude des paraboles ici désignées, permettent surtout de dessiner rapidement la configuration géométrique de ces coniques et d'aboutir ainsi à une autre forme de l'énoncé se prêtant mieux à l'analyse, et dispensant d'évaluer le paramètre de la parabole pour lui substituer la description d'un lieu géométrique (A) déduit d'un triangle et du cercle circonscrit, et qui a été maintes fois étudié ici et ailleurs : l'hypocycloïde triangulaire, enveloppe de la ligne pédale (ou droite de Wallace ou de Simson).

Rappelons donc les principales propriétés des paraboles conjuguées à un triangle ABC :

a Leurs foyers sont sur le cercle d'Euler ou des neuf points du triangle ABC.

J. Griffiths, question 742, **1865**, p. 429, résolue **1866**, p. 227 et retrouvée par L. Painvin, **1867**, p. 443.

Voir Note Weill, **1888**, p. 430.

b. Leurs directrices passent par un point fixe qui est le centre O du cercle circonscrit au triangle ABC.

G. Salmon, **1860**, p. 348.

J. Koehler, *Exercices de Géométrie analytique*, t. I, **1886**, p. 194.

---

(1) *Voir* 1916, p. 42.

Poujade, *J. de Math. spéc.*, question 228, résolue **1890**, p. 259.

c. Elles sont inscrites au triangle A′B′C′ des milieux des côtés du triangle ABC.

Ce triangle A′B′C′ est inscrit au cercle d'Euler, lieu du foyer F.

J. Griffiths, **1866**, p. 227.

La question est ainsi ramenée à :

Construire une parabole inscrite à un triangle A′B′C′, ayant son foyer en F (sur le cercle A′B′C′) et dont la directrice passe par un point fixe O (centre du cercle circonscrit au triangle ABC déduit du triangle A′B′C′ par des lignes parallèles);

Autrement dit :

Construire la parabole inscrite à un triangle et dont le foyer est en un point donné du cercle circonscrit à ce triangle.

Depuis que la question a été proposée, il est à croire que nombre de collaborateurs ont dû entreprendre une étude géométrique et faire intervenir certaines propositions des paragraphes (*a*) (*b*) (*c*). Peut-être même sont-ils parvenus à la description du lieu (A), mais alors ils ont été rebutés par la complication analytique.

Cependant, ils auraient pu reconnaître une question antérieure à la proposée, et dont il est fort possible qu'elle ait inspiré l'énoncé 1678, mais il fallait s'en souvenir. Il s'agit de la question 1505, de M. d'Ocagne (**1884**, p. 447).

La question 1678 n'ayant pas retenu mon attention, ce n'est qu'à l'occasion de la revision des questions demeurées non résolues que je fus amené à m'y intéresser, et si je puis aujourd'hui en appporter la solution, c'est que précisément je me suis souvenu d'avoir étudié en son temps la question 1505 et d'en avoir provoqué la solution donnée ici **1902**, p. 566-574, et **1903**, p. 48, par M. H. Lez.

Les questions 1505 et 1678 étant absolument équivalentes, on voit que la solution de la première s'applique à la seconde, et qu'ainsi, pour des paraboles conjuguées à un triangle ABC :

1° Le lieu des foyers F est le cercle circonscrit au triangle A′B′C′ des milieux des côtés;

2° Le lieu des sommets est une quartique extérieure, tangente et circonscrite au triangle;

3° L'enveloppe des axes est une hypocycloïde triangulaire tangente au cercle ABC;

4° L'enveloppe des tangentes aux sommets et une autre hypocycloïde triangulaire tangente au cercle ABC;

5° Les directrices passent par le point O, centre du cercle ABC, et orthocentre du triangle A′B′C′.

Note. — Il y aurait encore une réponse bien plus courte, ainsi qu'une référence bibliographique particulièrement intéressante: je veux parler de l'article de E. Duporcq : *Sur l'hypocycloïde à trois rebroussements*, **1902**, p. 168-171, où l'on trouve exposées les remarquables propriétés que voici :

Une même hypocycloide triangulaire est l'enveloppe : 1° des asymptotes des hyperboles équilatères circonscrites, 2° des tangentes aux sommets des paraboles inscrites, 3° des axes des paraboles conjuguées (toutes trois à un même triangle); 4° des axes des paraboles circonscrites à un même triangle.

A remarquer aussi qu'un cercle est le lieu : 1° des centres des hyperboles équilatères circonscrites, 2° des foyers des paraboles inscrites à un même triangle ;

Et enfin : 1° que les hyperboles équilatères passent par l'orthocentre du triangle inscrit, 2° que les directrices des paraboles passent par le centre du cercle circonscrit au triangle conjugué.

Toutes ces corrélations sont intéressantes à retenir, et c'est pourquoi j'ai cru devoir les rappeler et donner ainsi à la réponse **1673** plus de développement qu'elle n'exigeait.

1704 *bis*.

(1895, p. 39*; 1915, p. 288.)

Démontrer que, si un triangle se déplace en restant inscrit et circonscrit à deux coniques, le centre du cercle circonscrit à ce triangle décrit une conique. Examiner, en particulier, les cas où cette conique est un cercle, ou un système de deux droites. M. Weill.

Solution

Par M R. Bouvaist.

Désignons par T les triangles envisagés, par S et S′ les coniques qui leur sont inscrite et circonscrite. Ces triangles T

sont conjugués à une conique fixe Σ. On voit facilement en effet que si

$$S = \frac{p}{u} + \frac{q}{v} + \frac{r}{w} = 0, \qquad S' = \frac{\alpha}{x} + \frac{\beta}{y} + \frac{\gamma}{z} = 0,$$

$$\Sigma = \frac{p}{\alpha} x^2 + \frac{q}{\beta} y^2 + \frac{r}{\gamma} z^2.$$

Les cercles C circonscrits aux triangles T sont donc orthogonaux au cercle de Monge de Σ; il existe de plus une infinité de triangles inscrits dans chacun de ces cercles et circonscrits à S.

Soit alors

$$S = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$$

et soit

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 - \rho^2 = 0$$

le cercle de Monge de Σ; nous aurons, si

$$(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 - r^2 = 0$$

désigne un cercle C, les deux relations

$$(\alpha - x_0)^2 + (\beta - y_0)^3 - r^2 - \rho^2 = 0,$$

$$[\alpha^2 + \beta^2 - a^2 - \beta^2 - r^2]^2 + 4a^2b^2\left[\frac{\alpha^2}{a^2} + \frac{\beta^2}{b^2} - 1 - r^2\left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}\right)\right] = 0,$$

cette dernière étant la relation invariante $\Theta^2 - 4\Delta\Theta' = 0$ entre les coefficients de l'équation en λ de S et C.

Éliminons r^2 entre ces deux relations, nous aurons l'équation du lieu cherché :

$$(1) \qquad [2x_0x + 2y_0y - x_0^2 - y_0^2 + \rho^2 + a^2 + b^2]^2 - 4[a^2x^2 + b^2y^2 + a^2b^2] = 0.$$

C'est une conique dont les directions asymptotiques sont perpendiculaires aux tangentes menées du point (x_0, y_0) à la conique S.

Ce sera donc un cercle si le point $x_0 y_0$ centre de la conique Σ est un des foyers de S, une hyperbole équilatère ou une parabole si ce point est sur le cercle de Monge de S ou sur S.

Pour que la conique lieu soit un système de deux droites, il faut et il suffit que le discriminant de son équation soit nul, ce qui donne la condition

$$4[b^2x_0^2+a^2y_0^2-a^2b^2]+[x_0^2+y_0^2-a^2-b^2-\rho^2]^2=0.$$

L'équation de la conique lieu montre du reste que ce système de deux droites sera toujours imaginaire.

1816.

(1899, p. 148; 1915, p. 568.)

On considère les pieds des quatre normales menées d'un point à une conique C, *et les quatre triangles* T *formés par les tangentes menées en ces points à* C : 1° *à chaque triangle* T *on peut circonscrire une conique* A *ayant les mêmes axes de symétrie que* C; 2° *les normales à la conique* A *aux sommets du triangle* T *sont concourantes en un point* P; 3° *de chaque point* P *on mène la quatrième normale à la conique* A *correspondante. Les quatre normales ainsi obtenues sont parallèles, et leurs pieds sont en ligne droite.* (E. Duporcq.)

Deuxième Solution

Par M. E. Fabry.

Soit l'ellipse représentée par les équations

$$x=a\frac{1-t^2}{1+t^2},\qquad y=b\frac{2t}{1+t^2},\qquad \left(\frac{x}{a}\right)^2+\left(\frac{y}{b}\right)^2=1.$$

La normale a pour équation

$$2axt(a+t^2)-by(1-t^4)-2c^2t(1-t^2).$$

Par un point $M(x_0, y_0)$ on peut mener quatre normales dont les pieds sont donnés par l'équation

$$(1)\qquad by_0t^4+2(ax_0+c^2)t^3+2(ax_0-c^2)t-by_0=0.$$

Les quatre valeurs de t sont liées, quel que soit le point M, par les deux relations

$$(2)\qquad \Sigma t_1t_2=0,\qquad t_1t_2t_3t_4=-1,$$

et à quatre valeurs de t, liées par ces deux relations, correspondent quatre normales concourantes. En éliminant t_4, on a la relation

$$(3) \qquad t_1 t_2 t_3 (t_1 t_2 + t_2 t_3 + t_3 t_1) = t_1 + t_2 + t_3.$$

Les tangentes aux points t_1 et t_2 ont pour équations

$$bx(1 - t_1^2) + 2ay t_1 = ab(1 + t_1^2),$$
$$bx(1 - t_2^2) + 2ay t_2 = ab(1 + t_2^2);$$

elles se coupent au point de coordonnées

$$(4) \qquad x = a\frac{1 - t_1 t_2}{1 + t^1 t_2}, \qquad y = b\,\frac{t_1 + t_2}{1 + t_1 t_2}.$$

En permutant t_1, t_2, t_3, on a les trois sommets du triangle formé par les trois tangentes. Une conique, ayant les axes de coordonnées pour axes de symétrie, a pour équation

$$\frac{x^2}{A} + \frac{y^2}{B} = 1.$$

Pour qu'elle soit circonscrite au triangle des trois tangentes en t_1, t_2, t_3, il faut que l'on ait

$$(5) \qquad \left\{ \begin{aligned} &\frac{a^2}{A}(1 - t_1 t_2)^2 + \frac{b^2}{B}(t_1 + t_2)^2 = (1 + t_1 t_2)^2, \\ &\frac{a^2}{A}(1 - t_2 t_3)^2 + \frac{b^2}{B}(t_2 + t_3)^2 = (1 + t_2 t_3)^2, \\ &\frac{a^2}{A}(1 - t_3 t_1)^2 + \frac{b^2}{B}(t_3 + t_1)^2 = (1 + t_3 t_1)^2. \end{aligned} \right.$$

Ces trois équations, où $\frac{a^2}{A}$ et $\frac{b^2}{B}$ sont inconnues, se réduiront à deux si

$$\begin{vmatrix} (1 - t_1 t_2)^2 & (t_1 + t_2)^2 & (1 + t_1 t_2)^2 \\ (1 - t_2 t_3)^2 & (t_2 + t_3)^2 & (1 + t_2 t_3)^2 \\ (1 - t^3 t_1)^2 & (t_3 + t_1)^2 & (1 + t_3 t_1)^2 \end{vmatrix}$$
$$= 4(t_1 - t_2)(t_2 - t_3)(t_3 - t_1)\left[t_1 t_2 t_3 \Sigma t_1 t_2 - (t_1 + t_2 + t_3)\right] = 0,$$

équation qui est vérifiée d'après l'équation (3).

Si l'on retranche la seconde équation (5) de la première, et si l'on divise par $t_3 - t_1$, on a

$$(6) \quad \frac{a^2}{A}(t_1 t_2 + t_2 t_3 - 2) t_2 + \frac{b^2}{B}(t_1 + 2 t_2 + t_3) = (t_1 t_2 + t_2 t_3 + 2) t_2.$$

Les deux dernières équations (5) donnent de même

$$\frac{a^2}{A}(t_2 t_3 + t_3 t_1 - 2) t_3 + \frac{b^2}{B}(t_2 + 2 t_3 + t_1) = (t_2 t_3 + t_3 t_1 + 2) t_3.$$

En retranchant ces deux équations, et en divisant par $t_2 - t_3$, on a

$$(7) \quad \frac{a^2}{A}(t_1 t_2 + t_2 t_3 + t_3 t_1 - 2) + \frac{b^2}{B} = t_1 t_2 = t_2 t_3 + t_3 t_1 + 2.$$

En multipliant les deux membres par t_2, et en retranchant l'équation (6), on a

$$\frac{a^2}{A} t_1 t_2 t_3 - \frac{b^2}{B}(t_1 + t_2 + t_3) = t_1 t_2 t_3$$

et, en tenant compte de l'équation (3),

$$(8) \quad \frac{a^2}{A} - \frac{b^2}{B}(t_1 t_2 + t_2 t_3 + t_3 t_1) = 1.$$

Des équations (7) et (8) on déduit

$$\frac{a^2}{A} = \left(\frac{1+\Sigma}{1-\Sigma}\right)^2, \qquad \frac{b^2}{B} = \left(\frac{2}{1-\Sigma}\right)^2, \qquad \Sigma = t_1 t_2 + t_2 t_3 + t_3 t_1,$$

et l'équation de la conique

$$(9) \quad \frac{x^2}{a^2}(1+\Sigma)^2 + 4\frac{y^2}{b^2} = (1-\Sigma)^2.$$

On peut représenter cette ellipse, en fonction de θ, par les équations

$$x = a\,\frac{1-\Sigma}{1+\Sigma}\,\frac{1-\theta^2}{1+\theta^2}, \qquad y = b(1-\Sigma)\,\frac{\theta}{1+\theta^2}.$$

Le sommet (4) du triangle T correspond à une valeur de θ

qui doit vérifier les deux équations

$$\frac{1-\Sigma}{1+\Sigma}\,\frac{1-\theta^2}{1+\theta^2}=\frac{1-t_1t_2}{1+t_1t_2},\qquad (1-\Sigma)\frac{\theta}{1+\theta^2}=\frac{t_1+t_2}{1+t_1t_2};$$

la première donne

$$\theta^2=\frac{t_1t_2-\Sigma}{1-t_1t_2\Sigma}=\frac{-t_3(t_1+t_2)}{1-t_1t_2\Sigma}$$

et, en tenant compte de (3),

$$\theta^2=\frac{-t_3(t_1+t_2)}{1-\dfrac{t_1+t_2+t_3}{t_3}}=t_3^2.$$

De la seconde équation on déduit

$$\theta=\frac{(t_1+t_2)(1+t_3^2)}{(1+t_1t_2)(1-\Sigma)}=\frac{(t_1+t_2)(1+t_3^2)}{1-t_3(t_1+t_2)-\dfrac{t_1+t_2+t_3}{t_3}}=-t_3.$$

Les trois sommets du triangle correspondent aux trois valeurs de θ égales à $-t_1$, $-t_2$, $-t_3$.

La relation (3) donne ainsi

$$\theta_1\theta_2\theta_3(\theta_1\theta_2+\theta_2\theta_3+\theta_3\theta_1)=\theta_1+\theta_2+\theta_3$$

et montre que les trois normales à la conique (9) sont concourantes en un point P. Les relations (2) montrent que la quatrième normale, menée de P à la conique (9), correspond à la valeur $\theta_4=-t_4$.

Le coefficient angulaire de la normale en ce point, à la conique (9), est

$$2\frac{\theta_4}{1-\theta_4^2}\sqrt{\frac{A}{B}}=\frac{2t_4}{t_4^2-1}\,\frac{2a}{b(1+\Sigma)}.$$

Mais les équations (2) donnent

$$\Sigma=-t_4(t_1+t_2+t_3),\qquad t_4\Sigma=-\frac{1}{t_1}-\frac{1}{t_2}-\frac{1}{t_3},$$

$$\begin{aligned}(t_4^2-1)(1+\Sigma)&=t_4(t_1+t_2+t_3+t_4)-t_4\left(\frac{1}{t_1}+\frac{1}{t_2}+\frac{1}{t_3}+\frac{1}{t_4}\right)\\&=t_4(t_1+t_2+t_3+t_4+t_2t_3t_4+t_3t_4t_1+t_4t_1t_2+t_1t_2t_3)\\&=-\frac{4ax_0}{by_0}t_4\end{aligned}$$

en tenant compte de (1). Le coefficient angulaire est donc égal à $\frac{y_0}{x_0}$; c'est le même pour les quatre normales analogues.

Le pied de la normale en θ_4 à la conique (9) a pour coordonnées

$$x = a\frac{1-\Sigma}{1+\Sigma}\,\frac{1-t_4^2}{1+t_4^2}, \qquad y = b(\Sigma - 1)\frac{t_4}{1+t_4^2}.$$

En posant

$$S_1 = t_1 + t_2 + t_2 + t_4 = -1\,\frac{ax_0 + c^2}{by_0},$$
$$S_2 = t_1 t_2 + t_2 t_3 + t_3 t_4 + t_4 t_1 = 0,$$
$$S_3 = t_1 t_2 t_3 + t_2 t_3 t_4 + t_3 t_4 t_1 + t_4 t_1 t_2 = 2\,\frac{c^2 - ax_0}{by_0},$$
$$S_4 = t_1 t_2 t_3 t_4 = -1,$$

on a

$$x = a\,\frac{1 + t_4(t_1 + t_2 + t_3) - t_4^2 - t_4\left(\frac{1}{t_1} + \frac{1}{t_2} + \frac{1}{t_3}\right)}{1 - t_4(t_1 + t_2 + t_3) + t_4^2 - t_4\left(\frac{1}{t_1} + \frac{1}{t_2} + \frac{1}{t_3}\right)}$$
$$= a\,\frac{2 + t_4(S_1 + S_3) - 2t_4^2}{2 + t_4(S_3 - S_1) + 2t_4^2} = a\,\frac{by_0(1 - t_3^2) - 2ax_0 t_4}{by_0(1 + t_4^2) + 2c^2 t_4},$$

$$y = \frac{b}{1+t_4^2}\left(-t_4 - \frac{1}{t_1} - \frac{1}{t_2} - \frac{1}{t_3}\right) = \frac{b}{1+t_4^2}\left(-t_4 + \frac{1}{t_4} + S_3\right)$$
$$= \frac{(1-t_4^2)\,by_0 + 2(c^2 - ax_0)t_4}{t_3(1+t_4^2)y_0}.$$

Remplaçons partout la première puissance de t_4 par l'expression, déduite de (1),

$$t_4 = \frac{by_0}{2}\,\frac{1 - t_4^4}{ax_0(1 + t_4^2) + c^2(t_4^2 - 1)}.$$

On aura

$$x = a\,\frac{(1-t_4^2)[ax_0(1+t_4^2) + c^2(t_4^2 - 1)] - ax_0(1 - t_4^4)}{(1+t_4^2)[ax_0(1+t_4^2) + c^2(t_4^2 - 1)] + c^2(1 - t_4^4)}$$
$$= -\frac{c^2}{ax_0}\left(\frac{1-t_4^2}{1+t_4^2}\right)^2,$$

$$y = 2\,\frac{(1-t_4^2)[ax_0(1+t_4^2) + c^2(t_4^2 - 1)] + (c^2 - ax_0)(1 - t_4^4)}{(1+t_4^2)y_0(1 - t_4^4)}$$
$$= \frac{4c^2 t_4^2}{y_0(1+t_4^2)^2}.$$

On en déduit

$$\frac{yy_0}{4} - xx_0 = c^2.$$

Les pieds des quatre normales analogues sont sur cette droite.

Les mêmes calculs s'appliquent à l'hyperbole, en remplaçant b par bi et t par $-ti$, ce qui donne les équations de l'hyperbole

$$x = a\frac{1+t^2}{1-t^2}, \qquad y = b\frac{2t}{1-t^2}.$$

Autre solution par M. J. Lemaire.

RÉIMPRESSION DES ANCIENNES QUESTIONS NON RÉSOLUES.

Nous commençons aujourd'hui la publication nouvelle des énoncés des anciennes questions restées jusqu'ici sans solutions.

Elle sera continuée dans les numéros qui suivront, autant que le permettra la place disponible. Nous espérons que cela provoquera l'envoi de réponses nouvelles, et de solutions attendues depuis bien des années.

En principe, nous suivons l'ordre des numéros des questions. Cependant, pour celles qui émanent de trois auteurs (Laguerre, Mannheim et Cesáro) aujourd'hui disparus, nous réunirons les questions d'un même auteur, à cause de la connexité qui existe entre plusieurs des énoncés.

62 (1843, 96). — Soient un nombre quelconque m de points donnés et n un nombre entier moindre que $(m-1)$; on peut déterminer $(n+1)$ points tels que si, des points donnés et des points trouvés, on mène des lignes droites à un autre point quelconque, la somme des puissances $2n$ des lignes

menées des m points donnés soit à la somme des puissances $2n$ des lignes menées des autres points, comme m est à $(n+1)$.

M. Stewart.

126 (**1846**, 448). — Est-il possible de démontrer que $2^{\sqrt{2}}$ est une quantité irrationnelle ?

266 (**1852**, 401). — Soient trois axes rectangulaires; on les divise, à partir de l'origine, chacun en parties égales à l'unité; par les points de division d'un axe on mène respectivement des plans parallèles au plan des deux autres axes; ces trois systèmes de plans parallèles déterminent, par leurs intersections, tous les points dont les coordonnées sont des nombres entiers. Soit un point d'intersection ayant pour coordonnées les nombres entiers m, n, p; ce point est le sommet d'un parallélépipède. Prenons, dans l'intérieur de ce parallélépipède, trois points ayant pour coordonnées entières respectives m_1, n_1, p_1; m_2, n_2, p_2; m_3, n_3, p_3. Le plan qui passe par ces trois points partage le parallélépipède en deux portions; combien chaque portion renferme-t-elle de nombres entiers ?

333 (**1856**, 243). — Étant donnée une ligne d'intersection de deux surfaces de degrés m et n, quels sont les degrés respectifs des surfaces formées par les normales principales, les tangentes de la courbe, et les axes des plans osculateurs ?

ERRATUM.

Page 78, ligne 6 en remontant, *au lieu de* $L^2 14$, *lire* $M^2 4$.

[A1c]

SOMME DES CUBES DE n NOMBRES EN PROGRESSION ARITHMÉTIQUE;

Par M. G. FONTENÉ.

I.

1. J'aurai à utiliser les faits suivants, dont on trouvera plus loin l'historique, et qui deviennent très simples si l'on se borne à un exposé synthétique.

Théorème I. — *Si une progression arithmétique de raison* $2r$, *formée de* a *termes, a pour premier terme*

$$A = a^2 - (a-1)r, \tag{1}$$

son dernier terme est

$$a^2 + (a-1)r,$$

et la somme de ses termes est a^3, *c'est-à-dire le cube du nombre des termes.*

Théorème II. — *Si, en supposant que* r *est un entier positif, on prend dans la progression considérée ci-dessus* $a+r$ *termes à la suite des* a *premiers termes, ces nouveaux termes forment une progression qui est dans les mêmes conditions que la première.*

En effet, le premier terme de la nouvelle progression est $a^2+(a+1)r$; au lieu de $a(a-r)+r$, on a

donc $(a+r)a+r$, qui s'en déduit en changeant a en $(a+r)$. On aurait pu dire, bien entendu, que ce premier terme de la nouvelle progression admet l'écriture $(a+r)^2-(a+r-1)r$.

Théorème III. — *Si une progression arithmétique de raison $2r$ a pour premier terme*

$$A = a^2-(a-1)r,$$

a et r étant des entiers positifs, et si l'on y forme des groupes successifs contenant des termes en nombre

$$a, \quad a+r, \quad a+2r, \quad \ldots, \quad a+(p-1)r, \quad \ldots,$$

la somme des termes de chaque groupe est le cube du nombre des termes contenus dans le groupe, soit

$$a^3, \quad (a+r)^3, \quad (a+2r)^3, \quad \ldots, \quad [a+(p-1)r]^3, \quad \ldots.$$

Cela résulte de ce qui précède.

2. Le cas particulier $a=1$, $r=2$, est bien connu. On partage la suite des nombres impairs en groupes contenant 1, 2, 3, ... termes

$$1 \mid 3, 5 \mid 7, 9, 11 \mid, \quad \ldots$$

et la somme des p termes du $p^{\text{ième}}$ groupe est égale à p^3. Dans sa *Théorie des nombres* (p. 226), Ed. Lucas attribue cette propriété à Nicomaque de Gérase, qui vivait à la fin du Ier siècle de notre ère.

En 1889, sur une indication d'un de ses élèves, G. Brunet, qui avait considéré la suite

$$1 \mid 5, 9, 13 \mid 17, 21, 25, 29, 33 \mid, \quad \ldots$$

correspondant à $a=1$, $r=4$, M. J. Joffroy donnait

dans les *Nouvelles Annales* un résultat presque complet sur lequel je reviendrai dans un instant.

En 1914, M. Haton de la Goupillière, ayant eu connaissance, par une Note parue dans l'*Intermédiaire des Mathématiciens*, de la remarque de G. Brunet, publiait dans les *Comptes rendus* de l'Académie la solution de la question suivante qu'il s'était posée :

Si dans une progression arithmétique à termes entiers, on forme des groupes successifs contenant des termes en nombre

$$a, \quad a+r, \quad a+2r, \quad \ldots,$$

quelle doit être la raison R *de la progression et quel doit être son premier terme* A *pour que, dans chaque groupe, la somme des termes soit le cube d'un entier ?*

J'ai remplacé les notations p et q, a et r de M. Haton par les notations plus expressives a et r, A et R.

L'auteur trouve

$$R = 2r, \qquad A = a^2 - ar + r.$$

3. M. Joffroy s'était posé une question moins générale, en prenant *a priori* $R = 2r$, et en faisant commencer la progression par le terme a, c'est-à-dire en prenant $A = a$. Comme la relation (1) peut s'écrire

$$A - a = (a-1)(a-r),$$

l'auteur trouvait les deux solutions $a = 1$, $a = r$.

La première est intéressante. On considère la progression

$$1, \quad 1+2r, \quad 1+4r, \quad \ldots,$$

et l'on y forme des groupes où le nombre des termes

est successivement

$$1,\quad 1+r,\quad 1+2r,\quad \ldots;$$

les sommes des termes des groupes successifs sont

$$1,\quad (1+r)^3,\quad (1+2r)^3,\quad \ldots.$$

Pour $a = r$, on considère la progression

$$r,\quad 3r,\quad 5r,\quad \ldots,$$

on y forme des groupes où le nombre des termes est successivement

$$r,\quad 2r,\quad 3r,\quad \ldots,$$

et les sommes des termes des groupes successifs sont

$$r^3,\quad 2^3\times r^3,\quad 3^3\times r^3,\quad \ldots.$$

On peut dire alors : si, dans la suite

$$1,\quad 3,\quad 5,\quad \ldots,$$

on forme des groupes où le nombre des termes est successivement

$$r,\quad 2r,\quad 3r,\quad \ldots,$$

les sommes des termes des groupes successifs sont

$$(1^3,\ 2^3,\ 3^3,\ \ldots)\times r^2.$$

4. Sans reprendre ici l'analyse de M. Haton, je montrerai comment le calcul fort simple de M. Joffroy conduit assez naturellement à prendre $R = 2r$, et aboutit à la formule (1) quand on ne suppose plus $A = a$. Je rappelle d'abord les formules classiques

$$l' = a' + (n-1)r',\qquad S = \frac{a'+l'}{2}\,n,$$

d'où l'on déduit

$$S = \frac{a' + l'}{2} \times \frac{l' - a' + r'}{r'}, \qquad S = \left[a' + (n-1)\frac{r'}{2} \right] n.$$

Les nombres de termes des groupes successifs étant a, b, c, ..., l, $l+r$, ..., le premier terme du groupe qui contient $l+r$ termes est précédé de termes dont le nombre est

$$\frac{a+l}{2} \times \frac{l-a+r}{r};$$

le premier terme de la progression étant A, *et la raison étant* $2r$, ce terme a pour valeur

$$A + (a+l)(l-a+r);$$

la somme des termes du groupe est donc, d'après la dernière des formules rappelées ci-dessus,

$$[A + (l+a)(l-a+r) + (l+r-1)r](l+r);$$

si l'on néglige un facteur cubique qui peut être commun à tous les termes de la progression, *comme* $l+r$ *s'exprime linéairement en fonction de son rang dans la progression* a, b, c, ..., il apparaît que la somme en question doit être le cube de $l+r$, c'est-à-dire *le cube du nombre des termes contenus dans le groupe*.

On doit donc avoir

$$A + (l^2 - a^2) + 2lr + ar + r^2 - r = (l+r)^2,$$

ou

$$A = a^2 - (a-1)r;$$

c'est la formule (1).

II.

5. Si l'on désigne par S_h la somme des puissances d'exposant h des n premiers nombres entiers, on a (Sturm, *Cours d'Analyse*, t. II, p. 387)

$$S_{2k+1} = S_1^2 \times \varphi(S_1),$$
$$S_{2k} = S_2 \times \psi(S_1),$$

φ et ψ étant des fonctions entières à coefficients numériques *rationnels*.

Les formules

$$S_3 = S_1^2, \qquad 5 S_4 = S_2 \times (6 S_1 - 1)$$

sont connues depuis longtemps; la seconde a été donnée par Djamchid ben Mas'oud qui vivait au XVIe siècle (*Nouvelles Annales*, 2e série, t. IV, p. 239). Dostor a donné les expressions des sommes $S_5, \ldots, S_{10}$ (*Nouvelles Annales*, 2e série, t. XVIII, p. 513), sans voir toutefois que les polynomes en n qui multiplient S_1^2 et S_2 sont des fonctions de S_1.

La démonstration la plus simple de la formule $S_3 = S_1^2$ consiste à écrire l'identité

$$4p^3 = p^2 \times 4p = p^2[(p+1)^2 - (p-1)^2],$$

d'où

$$p^3 = \left[\frac{p(p+1)}{2}\right]^2 - \left[\frac{(p-1)p}{2}\right]^2 = \varphi(p) - \varphi(p-1);$$

on donne à p les valeurs $1, 2, 3, \ldots, n$ et l'on ajoute les égalités obtenues. Si l'on observe que $\left[\frac{p(p+1)}{2}\right]^2$ est la somme des $\frac{p(p+1)}{2}$ premiers nombres impairs, c'est-à-dire la somme des nombres impairs, à partir de 1, en nombre $1 + 2 + \ldots + (p-1) + p$, tandis

que $\left[\frac{(p-1)p}{2}\right]^2$ est la somme des nombres impairs, à partir de 1, en nombre $1+2+\ldots+(p-1)$, on est conduit à la propriété rappelée au début du n° 2; elle est obtenue de cette façon dans un article de M. Midy (*N. A.*, 1846, p. 640). Inversement, il résulte de cette propriété que la somme des cubes des n premiers nombres entiers est égale à la somme des nombres impairs, à partir de 1, en nombre

$$1+2+\ldots+n,$$

et cette somme a pour valeur

$$(1+2+\ldots+n)^2.$$

6. L'extension donnée à la propriété rappelée au début du n° 2 m'a permis d'établir la proposition suivante :

La somme des cubes de n termes consécutifs d'une progression arithmétique est liée à la somme même de ces termes par la formule

$$(2) \qquad \begin{aligned} \Sigma_3 &= \Sigma_1 \times \left[a^2+(n-1)ar+\frac{n(n+1)}{2}r^2\right] \\ &= \Sigma_1 \times [a(a-r)+r\Sigma_1], \end{aligned}$$

a désignant le premier terme et r la raison; s'il s'agit de nombres entiers, on voit que :

La somme des cubes de n nombres entiers en progression arithmétique est divisible par la somme de ces nombres.

L'établissement direct de cette formule, ou même une simple vérification, serait sans doute assez pénible; et l'on ne se rendrait pas compte ainsi du fait arithmétique auquel elle donne lieu pour a et r entiers.

La marche que nous suivrons, outre qu'elle est simple, explique le fait en question.

Soient a et r entiers. Dans la progression

$$A,\quad A+2r,\quad A+4r\quad \ldots,$$

où

$$A = a^2 - (a-1)r,$$

prenons des termes en nombre

$$(3)\quad N = a + (a+r) + (a+2r) + \ldots + [a+(n-1)r];$$

leur somme est

$$(4)\quad S = a^3 + (a+r)^3 + (a+2r)^3 + \ldots + [a+(n-1)r].$$

D'autre part cette somme a pour expression, d'après une formule écrite plus haut,

$$S = [A + (N-1)r]N,$$

ce qui montre déjà que la somme (4) *est divisible par la somme* (3), *pour a et r entiers*, *et en fait bien comprendre la raison : cette somme* (4) *est la somme des termes d'une progression arithmétique où le nombre des termes est la somme* N.

Comme on a

$$N = \left[a + (n-1)\frac{r}{2}\right]n = na + \frac{n(n-1)}{2}r,$$

il vient, en tenant compte de la valeur de A,

$$S = \left[a^2 - (a-1)r + \left(na + \frac{n(n-1)}{2}r - 1\right)r\right] \times N;$$

en supprimant $+r$ et $-r$ dans le crochet, on a la formule (2), pour a et r entiers.

Si l'on considère cette formule en elle-même, comme elle est vraie pour toute valeur entière de a et de r, elle est exacte quels que soient a et r.

On aurait même pu se contenter de démontrer la formule (2) pour $a = 1$ et r entier; dans le résultat obtenu, on aurait remplacé r par $\frac{r}{a}$, a et r étant quelconques. C'est ce que j'avais fait, avant de connaître l'extension donnée par M. Haton au résultat obtenu par M. Joffroy. Mais il y avait intérêt à établir directement le résultat pour le cas où a et r sont des entiers quelconques.

III.

7. Voici quelques remarques sur le théorème III. On peut d'abord, comme l'indique M. Haton, disposer par lignes les groupes de termes de la progression :

a termes,
a termes, *r termes*,
a termes, *r termes*, *r termes*,

et ainsi de suite.

M. Alezais a fait observer (p. 64 du présent Volume) que, si l'on supprime certains groupes au début de la progression, on obtient une solution qui ne doit pas être regardée comme essentiellement différente de celle d'où on l'a déduite; inversement, pour $a > r$, on peut introduire au début de nouveaux groupes contenant des termes en nombre

$$a - r, \quad a - 2r, \quad \ldots;$$

et cette remarque se comprend bien d'après ce qui a été dit au n° 1. On peut dès lors se borner, r étant donné, à prendre pour a les valeurs

$$a = 1, \quad 2, \quad 3, \quad \ldots, \quad r;$$

c'est ce que nous ferons dans ce qui suit.

Comme A s'exprime en fonction de a par un trinome du second degré

$$A = a^2 - ra + r,$$

si l'on donne à a deux valeurs équidistantes de $\frac{r}{2}$, à savoir

$$a = 1 \text{ ou } r-1, \quad 2 \text{ ou } r-2, \quad 3 \text{ ou } r-3, \quad \ldots,$$

on a A pour la même valeur. Une valeur de a ayant donné une progression, on obtient donc la même progression avec un autre groupement des termes, sauf pour $a = r$, et aussi pour $a = r'$ si $r = 2r'$.

Si l'on écrit

$$A - 1 = (a - 1)[a - (r - 1)],$$

on voit d'abord qu'on obtient $A = 1$ en prenant $a = 1$ ou $a = r - 1$; pour $r = 3$, on a les deux groupements

$$\underline{\mathbf{1}} \mid \underline{\mathbf{7}}, \underline{\mathbf{13}, \mathbf{19}, \mathbf{25}} \mid, \ldots,$$

$$\underline{\mathbf{1}, \mathbf{7}} \mid \underline{\mathbf{13}, \mathbf{19}}, \underline{\mathbf{25}, \mathbf{31}, \mathbf{37}} \mid, \ldots.$$

Pour les valeurs

$$a = 2, \quad 3, \quad \ldots, \quad r-3, \quad r-2,$$

A est négatif ou nul, nul seulement pour

$$r = 4, \qquad a = 2.$$

[D2bγ]

NOTE SUR LA SOMMATION D'UNE SÉRIE;

PAR M. I.-J. SCHWATT,
Professeur à l'Université de Pensylvanie,
Philadelphia, Pa. (U. S. A.).

(*Traduit de l'anglais.*)

Il s'agit de trouver la somme indiquée par la formule

(1) $$S = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{a+kh},$$

où a et h sont des entiers positifs.

I. Soit

$$a = nh;$$

alors

(2) $$\begin{aligned} S &= \frac{1}{h} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{n+k} \\ &= \frac{(-1)^n}{h} \sum_{k=n}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{k} \\ &= \frac{(-1)^n}{h} \left[\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n-1} (-1)^k \frac{1}{k} \right]. \end{aligned}$$

Mais

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{k} = -\log 2;$$

donc

(3) $$S = \frac{(-1)^{\frac{a}{h}}}{h} \log \frac{1}{2} - \frac{(-1)^{\frac{a}{h}}}{h} \sum_{k=1}^{\frac{a}{h}-1} (-1)^k \frac{1}{k}.$$

Si $a = h = 1$,

(4) $$S = -\log\frac{1}{2} = \log 2.$$

II. Soit

$$a = b + nh \qquad (b < h);$$

alors

(5) $$S = (-1)^n\left[\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{1}{b+kh} - \sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k\frac{1}{b+kh}\right]$$

$$= (-1)^n\left[\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{1}{b+kh} - \sum_{k=1}^{n}(-1)^{n+k}\frac{1}{a-kh}\right]$$

$$= (-1)^n\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{1}{b+kh} + \sum_{k=1}^{\left[\frac{a}{h}\right]}(-1)^{k-1}\frac{1}{a-kh}.$$

Si $a < h$, la dernière sommation se réduit à zéro. Soit maintenant

(6) $$\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{1}{b+kh} = S_1$$

et

(7) $$\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{r^{b+kh}}{b+kh} = S_2,$$

alors

$$S_1 = \lim_{r=1} S_2.$$

De (7) s'ensuit la relation

(8) $$\frac{dS_2}{dr} = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k r^{b+kh-1} = \frac{r^{b-1}}{1+r^h},$$

et, par conséquent,

(9) $$S_2 = \int_0^r \frac{r^{b-1}}{1+r^h}\,dr.$$

Soit

$$(10)\qquad \frac{r^{b-1}}{1+r^h} = \sum_{k=1}^{h} \frac{A_k}{r-s_k}, \qquad \text{où} \qquad s_k = e^{\frac{2k-1}{h}\pi i}$$

Nous avons alors

$$(11)\qquad A_k = s_k^{b-1}\left(\frac{r-s_k}{1+r^h}\right)_{r=s_k} = s_k^b \frac{1}{hs_k^h}.$$

Mais

$$s_k^h = 1;$$

donc

$$(12)\qquad A_k = -\frac{s_k^b}{h}$$

et

$$(13)\qquad \frac{r^{b-1}}{1+r^h} = -\frac{1}{h}\sum_{k=1}^{h}\frac{s_k^b}{r-s_k}$$

$$= \frac{1}{h}\sum_{k=1}^{h}\frac{s_k^b}{s_k-r}.$$

De là

$$(14)\qquad S_2 = -\frac{1}{h}\sum_{k=1}^{h} s_k^b \log\frac{s_k-r}{s_k}$$

et

$$(15)\qquad S_1 = -\frac{1}{h}\sum_{k=1}^{h} s_k^b \log(1-s_k^{-1}),$$

$$(16)\qquad S = -\frac{1}{h}\sum_{k=1}^{h}\left[\cos(2k-1)\frac{b\pi}{h} + i\sin(2k-1)\frac{b\pi}{h}\right] \times \log\left[1-\cos(2k-1)\frac{\pi}{h} + i\sin(2k-1)\frac{\pi}{h}\right],$$

$$(17)\qquad S = -\frac{1}{h}\left[\sum_{k=1}^{h}\cos(2k-1)\frac{b\pi}{h}\log\left(2\sin\frac{2k-1}{2h}\pi\right) - \frac{\pi}{2}\left(1-\frac{2k-1}{h}\right)\sin\frac{2k-1}{h}b\pi\right].$$

Puisque

$$\sum_{k=1}^{h} \cos(2k-1)\frac{b\pi}{h} = 0,$$

$$\sum_{k=1}^{h} \sin(2k-1)\frac{b\pi}{h} = 0$$

et

$$\sum_{k=1}^{h} (2k-1)\sin(2k-1)\frac{b\pi}{h} = -\frac{h}{\sin\frac{b\pi}{h}},$$

on a donc

$$(18)\quad S_1 = \frac{\pi}{2h\sin\frac{b\pi}{h}} - \frac{2}{h}\sum_{k=1}^{\left[\frac{h}{2}\right]} \cos(2k-1)\frac{b\pi}{h}\log\sin\frac{2k-1}{2h}\pi,$$

formule où $\left[\frac{h}{2}\right]$ représente la partie entière de $\frac{h}{2}$.

De là

$$(19)\quad S = (-1)^{\left[\frac{a}{h}\right]}\frac{\pi}{2h\sin\frac{b\pi}{h}} - \frac{2(-1)^{\left[\frac{a}{h}\right]}}{h}\sum_{k=1}^{\left[\frac{h}{2}\right]} \cos(2k-1)\frac{b\pi}{h}$$

$$\times\log\sin\frac{2k-1}{2h}\pi + \sum_{k=1}^{\left[\frac{a}{h}\right]} (-1)^{k-1}\frac{1}{a-kh}.$$

1° Si $a=1$, $h=2$, $b=1$, $\left[\frac{a}{h}\right]=0$,

$$(20)\qquad S = \frac{\pi}{4\sin\frac{\pi}{2}} - \sum_{k=1}^{1}\cos\frac{2k-1}{2}\pi\log\sin\frac{2k-1}{4}\pi$$

$$= \frac{\pi}{4} - \cos\frac{\pi}{2}\log\text{tang}\frac{\pi}{4}$$

$$= \frac{\pi}{4}.$$

2° Si $a = 1$, $h = 3$,

$$(21)\qquad S = \frac{\pi}{6\sin\frac{\pi}{3}} - \frac{2}{3}\sum_{k=1}^{1}\cos\frac{2k-1}{3}\pi\log\sin\frac{2k-1}{6}\pi$$

$$= \frac{1}{9}\pi\sqrt{3} + \frac{1}{3}\log 2.$$

3° Si $a = 1$, $h = 4$,

$$(22)\qquad S = \frac{\pi}{8\sin\frac{\pi}{4}} - \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{2}\cos\frac{2k-1}{4}\pi\log\sin\frac{2k-1}{8}\pi$$

$$= \frac{\pi\sqrt{2}}{8} - \frac{\sqrt{2}}{4}\log\left(\operatorname{tang}\frac{\pi}{8}\right)$$

$$= \frac{\pi\sqrt{2}}{8} + \frac{1}{4}\sqrt{2}\log(\sqrt{2}+1).$$

4° Si $a = 1$, $h = 5$,

$$(23)\qquad S = \frac{\pi}{10\sin\frac{\pi}{5}} - \frac{2}{5}\sum_{k=1}^{2}\cos\frac{2k-1}{5}\pi\log\sin\frac{2k-1}{10}\pi$$

$$= \frac{\pi}{10}\sqrt{2+\frac{2}{5}\sqrt{5}} - \frac{2}{5}\left(\cos\frac{\pi}{5}\log\sin\frac{\pi}{10} - \sin\frac{\pi}{10}\log\cos\frac{\pi}{5}\right)$$

$$= \frac{1}{5}\left[\frac{\pi}{2}\sqrt{2+\frac{2}{3}\sqrt{5}} + (1-\sqrt{5})\log 2 + \sqrt{5}\log(1+\sqrt{5})\right].$$

5° Si $a = 1$, $h = 6$,

$$(24)\qquad S = \frac{\pi}{12\sin\frac{\pi}{6}} - \frac{1}{3}\sum_{k=1}^{3}\cos\frac{2k-1}{6}\pi\log\sin\frac{2k-1}{12}\pi$$

$$= \frac{\pi}{6} - \frac{1}{3}\cos\frac{1}{6}\pi\log\operatorname{tang}\frac{1}{12}\pi$$

$$= \frac{\pi}{6} + \frac{1}{6}\sqrt{3}\log(2+\sqrt{3}).$$

6° Si $a = 1$, $h = 8$,

$$(25)\quad S = \frac{\pi}{16 \sin \frac{\pi}{8}} - \frac{1}{4}\sum_{k=1}^{4} \cos \frac{2k-1}{8}\pi \log \sin \frac{2k-1}{16}\pi$$

$$= \sqrt{1 + \frac{1}{2}\sqrt{2}} - \frac{1}{4}\left(\cos\frac{1}{8}\pi \log \operatorname{tang} \frac{1}{16}\pi + \sin\frac{1}{8}\pi \log \operatorname{tang} \frac{3}{16}\pi\right)$$

$$= \frac{\pi}{8}\sqrt{1 + \frac{1}{2}\sqrt{2}}$$

$$- \frac{1}{8}\Big\{\left(\sqrt{2+\sqrt{2}} + \sqrt{2-\sqrt{2}}\right)\log\left[(\sqrt{2}+1)\left(\sqrt{2(2-\sqrt{2})} - 1\right)\right]$$

$$+ \sqrt{2-\sqrt{2}}\,\log\left[2(\sqrt{2}-1)\left(\sqrt{2+\sqrt{2}}+1\right)+1\right]$$

Les résultats des exemples ci-dessus peuvent aussi être obtenus par la méthode suivante. Prenons le cas où $a = 1$ et $h = 8$, c'est-à-dire

$$(26)\qquad S = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{8k+1}.$$

Soit

$$(27)\qquad S_1 = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{r^k}{8k+1}.$$

Alors

$$S = \lim_{r=1} S_1.$$

Si u_k représente le $(k+1)^{\text{ième}}$ terme de S_1, alors

$$\frac{u_k}{u_{k-1}} = -r\frac{8k-7}{8k+1}.$$

Donc,

$$\sum_{k=0}^{\infty}(8k+1)u_k = -r\sum_{k=0}^{\infty}(8k+1)u_k + 1$$

ou

$$(28)\qquad 8r(1+r)\frac{dS_1}{dr} + (1+r)S_1 = 1.$$

Résolvant cette équation différentielle en S_1, nous

obtenons

$$(29)\qquad S_1 = \frac{1}{8r^{\frac{1}{8}}}\int_0^r \frac{dr}{r^{\frac{7}{8}}(1+r)}$$

$$= \frac{1}{r^{\frac{1}{8}}}\int_0^1 \frac{dx}{1+x^8}$$

et

$$(30)\qquad S = \int_0^1 \frac{dx}{1+x^8}.$$

Le résultat obtenu par l'évaluation de cette intégrale est le même que celui qu'indique la formule (25).

[K[1]2d]

SUR LE CERCLE DE TAYLOR RELATIF AU TRIANGLE;

Par M. V. THÉBAULT,
Professeur à Ernée (Mayenne).

---

1. Dans le *Bulletin de Mathématiques élémentaires*, 1909, p. 248, nous avons donné sous le n° 2422 la question suivante sur laquelle nous voudrions revenir ici :

Sur les côtés d'un triangle comme diamètres on décrit trois circonférences, puis on mène les lignes des centres qui coupent les demi-circonférences extérieures en six points. Démontrer que ces six points sont sur un même cercle.

Application. — *Si des pieds des hauteurs d'un triangle on abaisse les perpendiculaires sur les côtés, les six points obtenus sont sur un même cercle.*

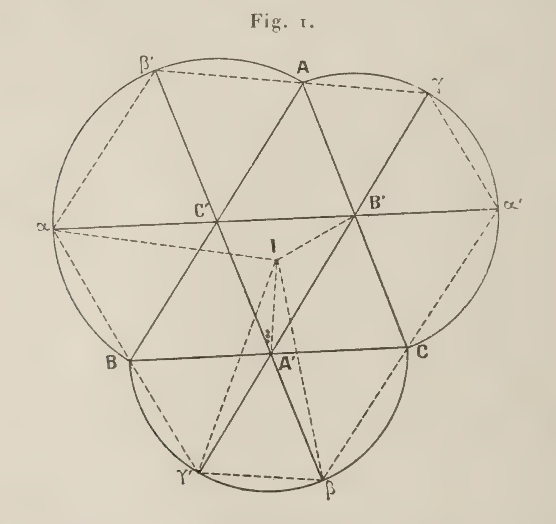
Soient ABC le triangle; A′, B′, C′ les milieux des côtés BC, CA, AB; α et α' les points d'intersection de B′C′ avec les demi-circonférences de centres B′ et C′; β et β', γ et γ' les points analogues (*fig.* 1).

On a

$$A'C' = B'A = B'\gamma',$$
$$A'B' = C'A = C'\beta'.$$

On en déduit que $A'\beta'$ est égal à $A'\gamma$. Donc le triangle $A'\beta'\gamma$ est isoscèle et il est ainsi homothétique de chacun des triangles isoscèles $C'\beta'A$ et $B'A\gamma$. Les droites $\beta'A$, $A\gamma$, $\beta'\gamma$ sont parallèles, ce qui prouve que

Fig. 1.



la droite $\beta'\gamma$ passe par A. De même $\gamma'\alpha$ passe par B et $\alpha'\beta$ par C. Le triangle $A'\beta'\gamma$ est aussi homothétique du triangle isoscèle $A'\beta\gamma'$, ce qui montre que $\beta\gamma'$ est parallèle à $\beta'\gamma$. De même, $\gamma\alpha'$ est parallèle à $\gamma'\alpha$ et $\alpha\beta'$ est parallèle à $\alpha'\beta$.

Le quadrilatère $A\beta'\alpha B$ étant inscriptible, il en est de même du quadrilatère $\gamma\beta'\alpha\gamma'$, puisque $\gamma\gamma'$ et AB sont

parallèles. De même, les quadrilatères $\alpha\gamma'\beta\alpha'$ et $\beta\alpha'\gamma\beta'$ sont inscriptibles.

D'autre part, les droites $\beta\gamma'$ et $\beta'A$ étant parallèles, on a

$$\widehat{\gamma'\beta\beta'} = \widehat{\beta\beta' A} = \widehat{\beta' AB};$$

mais, dans le quadrilatère inscriptible $A\beta'\alpha B$, l'angle $\beta' AB$ est supplémentaire de l'angle $B\alpha\beta'$ ou $\gamma'\alpha\beta'$. Par suite, les angles $\gamma'\beta\beta'$ et $\gamma'\alpha\beta'$ sont supplémentaires et le quadrilatère $\beta'\alpha\gamma'\beta$ est inscriptible. De même, les quadrilatères $\gamma'\beta\alpha'\gamma$ et $\alpha'\gamma\beta'\alpha$ sont inscriptibles.

On obtient ainsi six quadrilatères inscriptibles $\gamma\beta'\alpha\gamma'$ et $\gamma\alpha'\beta\gamma'$, $\alpha\gamma'\beta\alpha'$ et $\alpha\beta'\gamma\alpha'$, $\beta\gamma'\alpha\beta'$ et $\beta\alpha'\gamma\beta'$. Ils ont, pris deux à deux, trois sommets communs : $\gamma\beta'\alpha\gamma$ et $\beta\gamma'\alpha\beta'$, $\alpha\gamma'\beta\alpha'$ et $\gamma\alpha'\beta\gamma'$, $\beta\alpha'\gamma\beta'$ et $\alpha\beta'\gamma\alpha'$. Donc ces six quadrilatères sont inscriptibles dans le même cercle, autrement dit, les six points α, α', β, β', γ, γ' sont sur un même cercle.

Autrement, soit I le point de rencontre des bissectrices intérieures du triangle $A'B'C'$. Les deux triangles $IA'\gamma'$ et $IA'\beta$ sont égaux; ils ont, en effet, le côté IA' commun, les côtés $A'\gamma'$ et $A'\beta$ égaux comme rayons d'un même cercle, enfin, les angles $IA'\gamma'$ et $IA'\beta$ égaux comme formés de parties égales deux à deux. Donc

$$I\beta = I\gamma'.$$

D'autre part les deux triangles $IB'\alpha$ et $IB'\gamma'$ sont égaux; ils ont en effet le côté IB' commun, les angles $IB'\alpha$ et $IB'\gamma'$ égaux par construction, enfin les côtés $B'\alpha'$ et $B'\gamma'$ égaux, car

$$B'\alpha = B'C' + C'\alpha = CA' + C'B = A'\gamma' + B'A' = B'\gamma'.$$

Par suite

$$I\gamma' = I\alpha.$$

On a donc

$$I\beta = I\gamma' = I\alpha.$$

Par analogie

$$I\beta = I\gamma' = I\alpha = I\beta' = I\gamma = I\alpha'.$$

Les six points α, α', β, β', γ, γ' *sont sur un même cercle qui a pour centre le point de rencontre* I *des bissectrices intérieures du triangle qui a pour sommets les milieux des côtés du triangle* ABC.

Enfin soient d, e, f les points de contact des côtés du triangle A′B′C′ avec le cercle inscrit I à ce triangle; a, b, c, p, r les éléments habituels du triangle ABC.

On a par exemple

$$\alpha d = \alpha C' = C'd = \frac{c}{2} + \frac{p-c}{2} = \frac{p}{2}.$$

Par suite le rayon du cercle I des points α, α', β, β', γ, γ' a pour expression

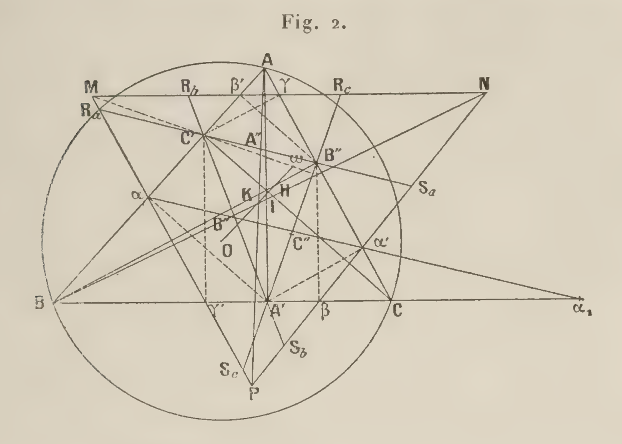
$$(1) \qquad \rho = \frac{1}{2}\sqrt{p^2 + r^2}.$$

Application. — Soient un triangle ABC; A′, B′, C′ les pieds des hauteurs; α et α' les projections de A′ respectivement sur AB et AC; β et β' celles de B′ respectivement sur BC et sur BA; γ et γ' celles de C′ respectivement sur CA et sur CB (*fig.* 2).

Visiblement, en désignant par A″, B″, C″ les milieux respectifs de B′C′, C′A′ et A′B′, les points β' et γ sont les intersections de A″C″ et de B″A″ avec la demi-circonférence A″ extérieure à A′B′C′ et de diamètre B′C′. De même α et α' sont situés sur B″C″, γ, γ' sur A″B″ et β, β' sur A″C″. D'après ce qui précède, les six points α, α', β, β', γ, γ' sont situés sur une circonférence Ω dont le

centre est l'intersection des bissectrices intérieures du

Fig. 2.



triangle A″B″C″. Le rayon de ce cercle découle de la formule (1) :

$$\rho' = R\sqrt{\sin^2 A \sin^2 B \sin^2 C + \cos^2 A \cos^2 B \cos^2 C} \quad (^1).$$

Ce cercle Ω est connu sous le nom de *cercle de Taylor du triangle* ABC.

2. Les côtés B′C′, C′A′, A′B′ sont respectivement antiparallèles aux côtés BC, CA, AB du triangle ABC dans les angles A, B, C. De même $\beta'\gamma$, $\gamma'\alpha$, $\alpha'\beta$ sont antiparallèles respectivement aux côtés du triangle A′B′C′ dans les angles A, B, C. Par conséquent $\gamma\beta'$ est parallèle à BC, $\gamma'\alpha$ à CA, $\alpha'\beta$ à AB, et *les triangles* ABC *et* MNP *sont inversement homothétiques*, M, N, P étant les intersections de $\beta'\gamma$ et $\gamma'\alpha$, $\beta'\gamma$ et $\alpha'\beta$, $\alpha'\beta$ et $\gamma'\alpha$. Cherchons leur centre d'homothétie (*fig.* 2).

---

(1) Nous ne savons si cette valeur simple de ρ' a été donnée déjà ; elle découle des valeurs du périmètre p' et du rayon du cercle inscrit r' relatifs au triangle orthique A′B′C′ de ABC (V. T.).

Soient M', N', P' les pieds des hauteurs du triangle MNP. B' et P', C' et M' sont des couples de points homologues et comme le quadrilatère (MN, BC), (BA, NP) est un parallélogramme, la diagonale BN contient les milieux de $B'C'$ et $M'P'$. Donc BN *est symédiane commune aux triangles* ABC *et* MNP.

Il en est de même de CM et AP et l'on a ce théorème dû à M. Neuberg (*Mathesis*, question n° 10) :

Les triangles ABC *et* MNP *sont inversement homothétiques, le centre d'homothétie étant le point* K *de Lemoine commun à ces deux triangles.*

Le triangle MNP nous paraît curieux à d'autres points de vue. Soit ω' le centre de son cercle circonscrit. Les droites $M\omega'$, $N\omega'$, $P\omega'$ sont respectivement symétriques des hauteurs MM', NN', PP' par rapport aux bissectrices intérieures des angles M, N, P. Soient C'_1, B'_1, A'_1 les points où ces rayons coupent respectivement les côtés AB, CA, CB du triangle ABC.

On a, par exemple, visiblement

$$\frac{\beta' C'_1}{C'_1 \alpha} = \frac{\sin A \cos A}{\sin B \cos B} = \frac{a \cos A}{b \cos B} = \frac{B' C'}{C' A'} = \frac{\beta' C'}{C' \alpha},$$

et C'_1 n'est autre que le pied de la hauteur CC' du triangle ABC.

Par suite, MC' parallèle à CO passe par l'orthocentre ω du triangle $A'B'C'$. D'où ce théorème que nous croyons remarquable parce qu'alors le triangle MNP est tout à fait analogue à celui $A'B'C'$ que nous avons étudié (*Nouvelles Annales*, mai 1915 : *Sur quatre triangles homothétiques*), et la figure possède toutes les propriétés que nous y avons données :

Dans un triangle ABC, *des pieds* A', B', C' *des hau-*

teurs on abaisse les perpendiculaires qui rencontrent respectivement les côtés du triangle en $\alpha, \alpha', \beta, \beta', \gamma, \gamma'$. *Les droites* $\beta'\gamma, \gamma'\alpha, \alpha'\beta$ *déterminent un triangle* MNP *inversement semblable au triangle* ABC *qui a même point de Lemoine* K *et dont le centre du cercle circonscrit est l'orthocentre* ω *du triangle orthique* A'B'C' *de* ABC.

En particulier, si r' est le rayon du cercle inscrit au triangle A'B'C', le rapport d'homothétie des triangles MNP et ABC est

$$1 + \frac{r'}{R},$$

expression qui peut se mettre sous les formes

$$\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C - 1 = \frac{5R^2 - \overline{OH}^2}{4R^2} = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{4R^2} - 1.$$

Dans notre Mémoire précédemment cité, nous avons établi, page 209, ce théorème :

Dans un triangle, le centre du cercle circonscrit O, *le point* K *de Lemoine, l'orthocentre* ω *du triangle orthique et le centre de gravité du périmètre de ce dernier triangle, sont quatre points en ligne droite.*

Nous pouvons maintenant préciser la position du point de Lemoine sur la droite $O\omega$:

Dans un triangle ABC *le point de Lemoine* K *partage le segment de droite* $O\omega$ *qui joint le centre du cercle circonscrit à l'orthocentre du triangle orthique* A'B'C' *dans le rapport*

$$\frac{a^2 + b^2 + c^2}{4R^2} - 1.$$

Nous reviendrons sur ce rapport par la suite.

Entre autres propriétés de la figure on peut ajouter que *les milieux des côtés du triangle orthique* A'B'C' *sont également ceux des droites* R_aS_a, R_bS_b, R_cS_c, R_a, S_a, R_b, S_b, R_c, S_c *étant respectivement les points où* C'B', B'A', A'C' *rencontrent* PM *et* NP, MN *et* NP, MN *et* PM.

Enfin, *l'orthocentre* H' *du triangle* MNP, *le point* K *de Lemoine de* ABC *et l'orthocentre* H *de* ABC *sont trois points en ligne droite, et*

$$\frac{KH}{H'K} = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{4R^2} - 1.$$

3. M. Naraniengar a proposé dans *Mathesis*, avril 1913, sous le n° **1916**, la question suivante dont il n'était pas parvenu de solution en 1914 :

Trouver le lieu du point de Lemoine d'un triangle variable inscrit à un cercle fixe et ayant son centre de gravité en un point donné.

Soient ABC le triangle, O le centre du cercle circonscrit de rayon R et G le point de concours des médianes.

La droite OG étant fixe contient comme l'on sait l'orthocentre H de ABC qui est aussi un point fixe tel que GH = 2OG. De plus un tel triangle ABC, variable dans un cercle fixe O et ayant pour orthocentre un point donné H, a la somme des carrés de ses côtés constante.

Le centre O' du cercle d'Euler de ABC est le centre du cercle circonscrit au triangle orthique A'B'C' dont le centre du cercle inscrit est H. La relation d'Euler donne

$$\text{const.} = \overline{O'H}^2 = d^2 = \frac{R^2}{4} - Rr',$$

d'où

$$r' = \frac{4d^2 - R^2}{4R} = \text{const.},$$

r' étant le rayon du cercle inscrit à $A'B'C'$.

La question revient donc à trouver le lieu du point K de $O\omega$, tel que

$$(2) \qquad \frac{OK}{K\omega} = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{4R^2} - 1 = \text{const.},$$

lorsque le triangle $A'B'C'$ varie tout en étant inscrit au cercle fixe O' de rayon $\frac{R}{2}$ et circonscrit au cercle fixe H de rayon r'.

Le lieu de ω est connu ([1]); il est homothétique à un arc de circonférence de centre H et de rayon $\left(\frac{R}{2} - r'\right)$, le centre d'homothétie étant O' et le rapport 2.

Par suite, le lieu de K est aussi un arc de circonférence homothétique à celui que décrit ω, le centre étant O et le rapport (2) précédent.

4. Nous terminerons cette Note par une intéressante propriété des triangles ABC et $A''B''C''$ (*fig.* 2).

Les deux triangles sont homologiques et le centre d'homologie est le point K *de Lemoine commun à* ABC *et* MNP.

Soient α_1 le point d'intersection de BC et $B''C''$ et β_1, γ_1 les points analogues.

Le quadrilatère $BC\alpha'\alpha$, par exemple, ayant deux côtés opposés BC et $\alpha'\alpha$ antiparallèles dans l'angle A, est inscriptible, et

$$\alpha_1\alpha' \times \alpha_1\alpha = \alpha_1 C \times \alpha_1 B.$$

([1]) *Journal de Vuibert*, 33e année, p. 155.

α_1 est donc un point de l'axe radical du cercle O circonscrit à ABC et du cercle α, α', β, β', γ, γ', c'est-à-dire du cercle Ω de Taylor de ABC. Par conséquent :

Le triangle ABC *et le triangle médian* A″B″C″ *de son triangle orthique* A′B′C′ *sont homologiques, le centre étant le point de Lemoine du triangle* ABC ; *l'axe d'homologie est l'axe radical des cercles circonscrit et de Taylor relatifs à* ABC. *Cet axe d'homologie est perpendiculaire à la droite qui joint le centre du cercle circonscrit au point de Lemoine du triangle* ABC.

Au triangle MNP correspond un triangle orthique M′N′P′ ayant M″N″P″ pour triangle médian. La propriété précédente est évidemment vraie pour les triangles MNP et M″N″P″ qui sont homologiques, K étant le centre et l'axe d'homologie Δ étant l'axe radical des cercles ω circonscrit et Ω' de Taylor relatifs à MNP.

Cet axe d'homologie est également perpendiculaire à la droite qui joint le centre du cercle circonscrit au point de Lemoine du triangle ABC.

[M³6a]

NOTE SUR LES QUARTIQUES GAUCHES UNICURSALES ;

Par M. M.-F. EGAN.

Je me propose dans cette Note d'établir, pour la courbe rationnelle générale du quatrième ordre, des théorèmes analogues à ceux que M. Ch. Michel a

donnés, dans ce Recueil ([1]), pour une classe de ces courbes.

Rappelons d'abord quelques propriétés de ces courbes ([2]). Les quatre coordonnées x_i d'un point de la courbe étant proportionnelles à quatre polynomes quartiques en un paramètre t, la condition que les points t_i ($i = 1, 2, 3, 4$) soient dans un même plan s'exprime sous la forme

$$(1) \qquad f_0\sigma_4 + 4f_1\sigma_3 + 6f_2\sigma_2 + 4f_3\sigma_1 + f_4 = 0,$$

les f_i étant des constantes, et σ_i désignant la somme des produits des t pris i à la fois. Autrement dit, les points donnés par l'équation

$$a_0 t^4 + 4a_1 t^3 + 6a_2 t^2 + 4a_3 t + a_4 = a(t) = 0$$

sont dans un même plan lorsque les formes $a(t)$ et $f(t)$ sont apolaires l'une à l'autre, c'est-à-dire lorsqu'on a

$$(2) \qquad a_0 f_4 - 4a_1 f_3 + 6a_2 f_2 - 4a_3 f_1 + a_4 f_0 = 0.$$

Soit $\Sigma\lambda_i x_i = 0$ l'équation de ce plan. On obtient la forme $a(t)$ en substituant aux x_i les polynomes en t qui leur sont proportionnels. Les a_i sont donc des fonctions linéaires de λ_i, et l'on peut considérer les a_i comme des coordonnées du plan (a). Le nombre effectif de ces coordonnées se réduit à quatre en vertu de l'identité (2).

Supposons par exemple que le plan (a) soit un plan osculateur de la courbe. La forme $a(t)$ a trois racines

---

([1]) *Nouvelles Annales*, 1907, p. 289.

([2]) *Voir*, par exemple, H.-W. Richmond, *On rational Space Quartic Curves* (*Transactions of the Cambridge Philosophical Society*, Vol. XIX). On y trouvera une bibliographie très complète.

égales, on a donc

$$I(a) = a_0 a_4 - 4 a_1 a_4 + 3 a_2^2 = 0,$$

$$J(a) = a_0 a_2 a_4 - a_0 a_3^2 - a_1^2 a_4 + 2 a_1 a_2 a_3 - a_2^3 = 0.$$

Il s'ensuit que les plans osculateurs touchent la quadrique (I) et la surface (J) de troisième classe.

L'équation fondamentale $f(t) = 0$ donne les quatre points de surosculation. Les racines du covariant sextique de f, soit $\gamma(t)$, se répartissent en trois couples. Si l'on désigne par *corde principale* une corde par laquelle passent les plans osculateurs en ses deux extrémités, les racines de $\gamma(t)$ donnent les extrémités des trois cordes principales de la courbe. Ces cordes se rencontrent en un point, qu'on appelle le *centre* de la courbe; on donne aussi aux trois cordes le nom d'*axes*.

Ces points étant posés, voici les théorèmes dont il est question :

1° *Soient* A *un point de la courbe et* C *le centre. Par la droite* AC *on peut mener quatre plans tangents à la courbe, en dehors du plan qui passe par* C *et par la tangente en* A. *Les points de contact de ces quatre plans sont dans un même plan* π *passant par* C.

2° *Lorsque* A *se déplace sur la courbe, le plan* π *enveloppe la quadrique* (I) *inscrite dans la développable.*

Pour les démontrer, transformons le paramètre (t) homographiquement, de façon que $f(t)$ prenne la forme canonique

$$f(t) = t^4 + 6 c t^2 + 1.$$

Les paramètres des extrémités des axes seront alors

$$(0, \infty), \quad (\pm 1), \quad (\pm i).$$

Prenons pour tétraèdre de référence le trièdre des axes et un plan quelconque. On peut alors écrire les équations de la courbe sous la forme

$$(3) \qquad \frac{x_1}{t^3 - t} = \frac{x_2}{t^3 + t} = \frac{x_3}{t^4 - 1} = \frac{x_4}{\varphi(t)}.$$

En effet, la courbe rencontre la face $x_1 = 0$ du tétraèdre de référence aux points $t = 0, \infty, 1, -1$; et ainsi de suite.

La condition (2), pour que les points donnés par $a(t) = 0$ soient dans un même plan, devient

$$a_0 + a_4 + 6ca_2 = 0.$$

Pour que l'équation de ce plan soit

$$\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \lambda_3 x_3 = 0.$$

il faut et il suffit, d'après les équations (3), qu'on ait

$$(4) \qquad a_0 + a_4 = 0, \qquad a_2 = 0, \qquad \dots.$$

Soit t_0 le paramètre du point A, et considérons le plan (a), qui passe par A, qui touche la courbe au point $t = \theta$ et qui la rencontre encore au point $t = \theta'$. Le polynome $a(t)$ devient

$$a(t) = (t - t_0)(t - \theta')(t - \theta)^2.$$

Pour que ce plan passe par le centre, il faut, d'après les équations (4), que

$$\theta^2 t_0 \theta' + 1 = 0, \qquad \theta'(2\theta + t_0) + \theta^2 + 2\theta t_0 = 0,$$

d'où l'équation en θ

$$b(\theta) = \theta^4 t_0 + 2\theta^3 t_0^2 - 2\theta - t_0 = 0,$$

qui donne les points de contact des quatre plans tangents menés par AC à la courbe, en dehors de celui qui passe par C et par la tangente en A.

On a

$$b_0 + b_4 = 0, \qquad b_2 = 0;$$

donc ces quatre points sont dans un plan π passant par le centre. On a aussi

$$I(b) = -t_0^2 + t_0^2 = 0,$$

d'où il suit que le plan π touche la quadrique (I).

Lorsque les tangentes de la courbe font partie d'un complexe linéaire, il y a une infinité de centres, situés sur une corde IJ. Par un point quelconque de IJ on peut mener deux cordes principales, qui constituent avec IJ un système de trois axes. C'est le cas que M. Michel a traité.

Revenons au cas général. Les plans π enveloppent un cône quadrique de sommet C. Parmi ces plans se trouvent les plans osculateurs aux extrémités des axes : en effet, ces plans passent par C et sont tangents à la quadriqne (I). Si l'on projette la courbe du point C sur un plan quelconque, on obtient une quartique plane rationnelle à trois points doubles d'inflexion. On retrouve ainsi les théorèmes de Laguerre signalés par M. Michel [1].

---

[1] *Nouvelles Annales*, 1907, p. 296.

[M'e] [O'2e]

CONSTRUCTION DU CENTRE DE COURBURE DE LA SPIRALE HYPERBOLIQUE;

Par M. F. BALITRAND.

On trouve dans Serret (*Calcul différentiel et intégral*, 2e édition, p. 360) la remarque suivante à propos du centre de courbure de la spirale hyperbolique : « La construction du rayon de courbure n'a elle-même aucune difficulté; mais elle n'offre pas assez d'intérêt pour que nous nous arrêtions à la développer. » On peut cependant donner de ce rayon plusieurs constructions géométriques, intéressantes à cause de leur simplicité.

Soient O le pôle de la spirale; M un de ses points; N et T les points de rencontre de la perpendiculaire élevée en O, au rayon vecteur OM, avec la normale et la tangente en M à la courbe. L'équation de la spirale étant, en coordonnées polaires,

$$\rho\omega = a,$$

l'expression générale du rayon de courbure,

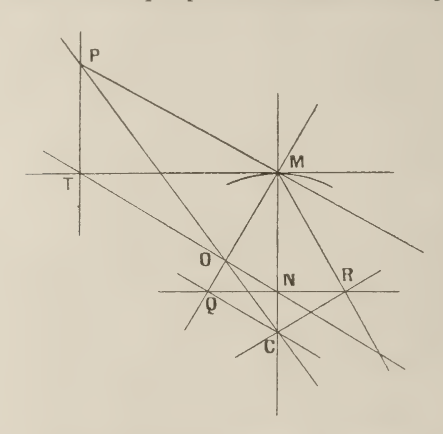
$$R = \frac{(\rho^2 + \rho'^2)^{\frac{3}{2}}}{\rho^2 + 2\rho'^2 - \rho\rho''},$$

donne dans le cas présent

$$R = \frac{\rho(a^2 + \rho^2)^{\frac{3}{2}}}{a^3} = \frac{MN^3}{OM^2} = \frac{MN^3}{ON \times OT}.$$

Cette formule conduit aux constructions géométriques suivantes du centre de courbure C en M :

1° *En* T *on élève une perpendiculaire à la tangente et en* M *une perpendiculaire au rayon vec-*



teur OM; *ces deux droites se coupent en* P; *la droite* PO *passe par le centre de courbure* C.

En effet, les triangles semblables OTP, ONC donnent, puisque TP = MN,

$$\frac{NC}{MN} = \frac{ON}{OT},$$

d'où

$$\frac{MC}{MN} = \frac{TN}{OT} = \frac{\overline{MN}^2}{OT \times ON}.$$

Donc MC est bien égal au rayon de courbure R.

2° *Par le point* N *on mène une parallèle à la tangente* MT *qui coupe le rayon vecteur* OM *en* Q; *la perpendiculaire élevée en ce point au rayon vecteur passe par le centre de courbure* C.

En effet, les triangles semblables MON, MQC

donnent

$$\frac{MC}{MN} = \frac{MQ}{MO} = \frac{MQ \times MO}{OT \times ON}.$$

Mais le triangle rectangle MNQ donne

$$\overline{MN}^2 = MQ \times MO;$$

donc

$$\frac{MC}{MN} = \frac{\overline{MN}^2}{OT \times ON};$$

ce qui prouve bien que C est le centre de courbure.

3° *En* M *on mène la symétrique du rayon vecteur par rapport à la normale; la parallèle à la tangente menée par* N *la coupe en* R; *la perpendiculaire élevée en* R *à* MR *passe au centre de courbure* C.

Le triangle MQR étant isoscèle, cette construction ne diffère pas au fond de la précédente.

[O¹2c]

ÉGALITÉ ENTRE DEUX ARCS D'UNE ELLIPSE ET D'UN LIMAÇON DE PASCAL;

Par M. E.-N. BARISIEN.

I.

Considérons tout d'abord l'ellipse d'équation

$$b^2x^2 + a^2y^2 - a^2b^2 = 0.$$

Soit M un point sur l'ellipse dont l'angle d'anomalie

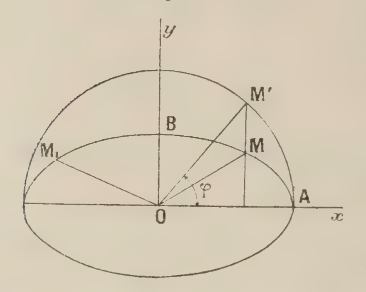
excentrique est φ. Les coordonnées de ce point sont

$$x = a\cos\varphi, \qquad y = b\sin\varphi;$$

d'où

$$\frac{dx}{d\varphi} = -a\sin\varphi, \qquad \frac{dy}{d\varphi} = b\cos\varphi\, d\varphi.$$

Fig. 1.



On a donc pour l'élément d'arc d'ellipse

$$\frac{ds}{d\varphi} = \sqrt{\left(\frac{dx}{d\varphi}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\varphi}\right)^2} = \sqrt{a^2\sin^2\varphi + b^2\cos^2\varphi}.$$

Or, le demi-diamètre conjugué à OM, OM_1 a pour valeur

$$OM_1 = \sqrt{a^2\sin^2\varphi + b^2\cos^2\varphi}.$$

Donc

$$\frac{ds}{d\varphi} = OM_1.$$

Si A est le sommet (a, o) l'arc AM de l'ellipse est donné par la formule

$$(1) \qquad s_{AM} = \int_0^{\varphi} \sqrt{a^2\sin^2\varphi + b^2\cos^2\varphi}\, d\varphi.$$

II.

Considérons maintenant le limaçon de Pascal dont l'équation polaire est

$$r = A\cos\theta + B.$$

L'élément d'arc de cette courbe est

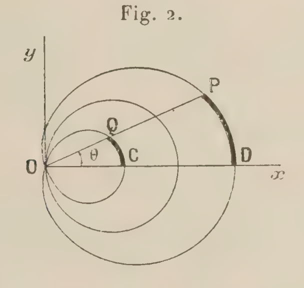
$$\frac{ds}{d\theta} = \sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2} = \sqrt{(A\cos\theta + B)^2 + A^2\sin^2\theta}$$

$$= \sqrt{A^2 + B^2 + 2AB\cos\theta}$$

$$= \sqrt{(A^2 + B^2)\left(\cos^2\frac{\theta}{2} + \sin^2\frac{\theta}{2}\right) + 2AB\left(\cos^2\frac{\theta}{2} - \sin^2\frac{\theta}{2}\right)}$$

$$= \sqrt{(A + B)^2\cos^2\frac{\theta}{2} + (A - B)^2\sin^2\frac{\theta}{2}}.$$

Fig. 2.



Si O est le point double du limaçon (ou pôle), si C et D sont les sommets tels que

$$OC = A - B, \qquad OD = A + B,$$

les arcs PD et QC correspondant à l'angle θ ont pour valeurs

$$(2) \quad s_{PD} = 2\int_0^\theta \sqrt{(A + B)^2\cos^2\frac{\theta}{2} + (A - B)^2\sin^2\frac{\theta}{2}}\, d\left(\frac{\theta}{2}\right),$$

$$(3) \quad s_{QC} = 2\int_0^\theta \sqrt{(A - B)^2\cos^2\frac{\theta}{2} + (A + B)^2\sin^2\frac{\theta}{2}}\, d\left(\frac{\theta}{2}\right).$$

Pour comparer les formules (2) et (3) à la formule (1), posons

$$\theta = 2\psi = 180^\circ - 2\omega,$$
$$\frac{\theta}{2} = \psi = 90^\circ - \omega.$$

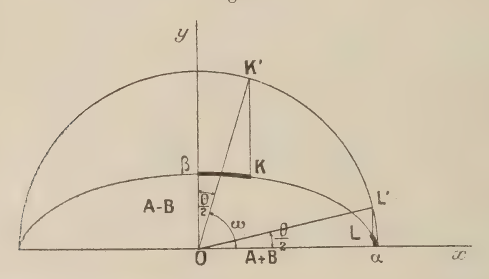
On a alors

$$(4)\quad s_{PD} = 2\int_{\omega=\frac{\pi}{2}-\frac{\theta}{2}}^{\omega=\frac{\pi}{2}} \sqrt{(A+B)^2\sin^2\omega + (A-B)^2\cos^2\omega}\, d\omega,$$

$$(5)\quad s_{QC} = 2\int_{\psi=0}^{\psi=\frac{\theta}{2}} \sqrt{(A+B)^2\sin^2\psi + (A-B)^2\cos^2\psi}\, d\psi.$$

Construisons l'ellipse de demi-axes $(A+B)$ et $(A-B)$ et son cercle principal.

Fig. 3.



Soient les demi-axes

$$O\alpha = A+B, \qquad O\beta = A-B.$$

Soient L' et K' des points du cercle principal tels que

$$\widehat{L'O\alpha} = \frac{\theta}{2}, \qquad \widehat{K'O\beta} = \frac{\theta}{2}.$$

Si L et K sont les points de l'ellipse correspondant à L' et K', on a les deux égalités d'arcs

(6) arc PD (limaçon) = 2 arc βK (ellipse),

(7) arc QC (limaçon) = 2 arc Lα (ellipse).

III.

Périmètre du limaçon. — On l'obtient soit par l'arc PD, soit par l'arc QC.

L'arc PD, formule (2), donne pour l'arc total du limaçon

$$(8)\quad \begin{cases} S = 4\displaystyle\int_{\theta=0}^{\theta=\pi} \sqrt{(A+B)^2\cos^2\frac{\theta}{2} + (A-B)^2\sin^2\frac{\theta}{2}}\, d\left(\frac{\theta}{2}\right), \\ S = 4\displaystyle\int_{\omega=0}^{\omega=\frac{\pi}{2}} \sqrt{(A+B)^2\sin^2\omega + (A-B)^2\cos^2\omega}\, d\omega. \end{cases}$$

L'arc QC, formule (3), donne de même

$$(9)\quad \begin{cases} S = 4\displaystyle\int_{\theta=0}^{\theta=\pi} \sqrt{(A+B)^2\sin^2\frac{\theta}{2} + (A-B)^2\cos^2\frac{\theta}{2}}\, d\left(\frac{\theta}{2}\right), \\ S = 4\displaystyle\int_{\psi=0}^{\psi=\frac{\pi}{2}} \sqrt{(A+B)^2\sin^2\psi + (A-B)^2\cos^2\psi}\, d\psi. \end{cases}$$

Les formules (8) et (9) démontrent donc le joli résultat suivant :

Le périmètre d'un limaçon de Pascal est équivalent au périmètre de l'ellipse qui a pour demi-axes les distances du point double (ou pôle) à chacun des sommets du limaçon.

Lorsque le limaçon devient une cardioïde, alors $B = A$, l'ellipse devient la *droite aplatie* de longueur $4A$ dont le périmètre est bien $8A$. C'est la longueur connue de la cardioïde dont le cercle de base de la conchoïde a pour diamètre A.

Réciproquement, si l'on pose

$$a = A + B, \quad b = A - B,$$

on en déduit

$$A = \frac{a+b}{2}, \qquad B = \frac{a-b}{2}.$$

On peut donc dire que :

Le périmètre d'une ellipse donnée est équivalent à celui du limaçon de Pascal dont le cercle générateur, base de la conchoïde, a pour diamètre le $\frac{1}{4}$ de la somme des axes, et pour constante modulaire le $\frac{1}{4}$ de la différence de ces axes.

[O¹2e]

DÉTERMINATION DU RAYON DE COURBURE EN UN POINT DE CERTAINES COURBES PLANES;

Par M. R. BOUVAIST.

Théorème. — *Si l'on considère un faisceau linéaire tangentiel de courbes planes $f + \lambda\varphi = 0$, les courbes de base $f = 0$, $\varphi = 0$ étant de classe m :*

1° *Le point de contact O de la courbe du faisceau qui touche une droite donnée Δ est l'intersection de Δ avec la droite joignant les pôles de Δ par rapport aux courbes $f = 0$, $\varphi = 0$.*

2° *Le rayon de courbure O de la courbe considérée est donné par la formule*

$$\rho = -(m-1)\frac{\dfrac{1}{\mu_1\mu_2} - \dfrac{1}{\mu'_1\mu'_2}}{\dfrac{1}{y_1} - \dfrac{1}{y_2}},$$

y_1 et y_2 désignant les distances des pôles P_1 et P_2 de la droite Δ par rapport à $f = 0$ et $\varphi = 0$ à cette droite; μ_1, μ_2, μ'_1, μ'_2 les tangentes des angles que font avec Δ les tangentes menées de O aux coniques polaires de Δ par rapport à $f = 0$, $\varphi = 0$.

1° Les pôles de Δ par rapport aux courbes du faisceau considéré sont sur une droite Δ_1, le point de contact de Δ avec la courbe du faisceau qui lui est tangente étant son pôle par rapport à cette courbe, la proposition est démontrée.

2° Prenons pour origine le point O, pour axes des x et des y la droite Δ et la perpendiculaire à cette droite en O, on voit facilement que le rayon de courbure en O d'une courbe $\psi(u, v, w) = 0$ tangente à Δ en ce point est donné par la formule $\rho = -\frac{v\psi''_{u^2}}{\psi'_w}$.

Ceci posé, nous pouvons écrire l'équation de la courbe $f(u, v, w) = 0$ sous la forme

$$
\begin{aligned}
&(u, v, w)\\
&\quad= [A u^m + B u^{m-1} v\\
&\qquad + C u^{m-2} v^2 + \ldots + I u^2 v^{m-2} + L u v^{m-1} + K v^m]\\
&\quad + w\ [A_1 u^{m-1} + B_1 u^{m-2} v + \ldots + L_1 u v^{m-2} + K_1 v^{m-1}]\\
&\quad + w^2 [A_2 u^{m-1} + B_1 u^{m-3} v + \ldots + L_2 u v^{m-3} + K_2 v^{m-2}]\\
&\qquad\qquad + w^3 f_{m-3} + \ldots + w^{m-1} f_1 + w^m = 0,
\end{aligned}
$$

$f_{m-3}, f_{m-4}, \ldots, f_1$ désignant des polynomes homogènes en u, v de degré égal à l'indice dont ils sont affectés. Nous supposerons l'équation de la courbe $\varphi(u, v, w) = 0$ écrite sous la même forme, les coefficients des différents termes étant A', B', $\ldots$, A'_1, B'_1, $\ldots$.

Les pôles de Δ par rapport à f et φ seront

$$
\begin{aligned}
u(f'_u)_0 + v(f'_v)_0 + w(f'_w)_0 = 0,\\
u(\varphi'_u)_0 + v(\varphi'_v)^0 + w(\varphi'_w)_0 = 0,
\end{aligned}
$$

où $(f'_u)_0$, $(f'_v)_0$, $\ldots$ désignent les dérivées correspondantes dans l'expression desquelles on a fait $u = w = 0$, c'est-à-dire

$$
\begin{aligned}
L\ u + mK\ v + K_1\ w = 0,\\
L' u + mK' v + K'_1\ w = 0;
\end{aligned}
$$

les coniques polaires

$$\begin{gathered}u^2(f''_{u^2})_0 + \quad v^2(f''_{v^2})_0 + \quad w^2(f''_{w^2})_0\\ + 2uv(f''_{uv})_0 + 2uw(f''_{uw})_0 + 2vw(f''_{vw})_0 = 0,\end{gathered}$$

$$\begin{gathered}u^2(\varphi''_{u^2})_0 + \quad v^2(\varphi''_{v^2})_0 + \quad w^2(\varphi''_{w^2})_0\\ + 2uv(\varphi''_{uv})_0 + 2uw(\varphi''_{uw})_0 + 2vw(\varphi''_{vw})_0 = 0\end{gathered}$$

seront de même

$$\begin{gathered}2\mathrm{I}\,u^2 + m(m-1)\mathrm{K}\,v^2 + 2\mathrm{K}_2\,w^2\\ + 2(m-1)\mathrm{L}\,uv + 2\mathrm{L}\,uw + 2(m-1)\mathrm{K}_1\,vw = 0,\end{gathered}$$

$$\begin{gathered}2\mathrm{I}'u^2 + m(m-1)\mathrm{K}'v^2 + 2\mathrm{K}'_2\,w^2\\ + 2(m-1)\mathrm{L}'uv + 2\mathrm{L}'uw + 2(m-1)\mathrm{K}'_1\,vw = 0.\end{gathered}$$

Nous avons d'autre part, pour expression du rayon de courbure en O,

$$\rho = -\frac{v(f''_{u^2} + \lambda\varphi''_{u^2})}{f'_w + \lambda\varphi'_w} = -\frac{2(\mathrm{I} + \lambda\mathrm{I}')}{\mathrm{K}_1 + \lambda\mathrm{K}'_1};$$

or la courbe considérée étant tangente en O à Ox, nous aurons

$$\mathrm{K} + \lambda\mathrm{K}' = 0, \qquad \text{d'où} \qquad \rho = -2\frac{\dfrac{\mathrm{I}}{\mathrm{K}} - \dfrac{\mathrm{I}'}{\mathrm{K}'}}{\dfrac{\mathrm{K}_1}{\mathrm{K}} - \dfrac{\mathrm{K}'_1}{\mathrm{K}'}}.$$

Si l'on remarque maintenant que les ordonnées des pôles de Ox par rapport à $f = 0$, $\varphi = 0$ sont

$$y_1 = \frac{m\mathrm{K}}{\mathrm{K}_1}, \qquad y_2 = \frac{m\mathrm{K}'_1}{\mathrm{K}'}$$

et que les produits des coefficients angulaires des tangentes menées de l'origine aux coniques polaires de ce point sont

$$\mu_1\mu_2 = m(m-1)\frac{\mathrm{K}}{2\mathrm{I}}, \qquad \mu'_1\mu'_2 = m(m-1)\frac{\mathrm{K}'}{2\mathrm{I}'},$$

nous aurons

$$\rho = -(m-1)\frac{\frac{1}{\mu_1\mu_2} - \frac{1}{\mu'_1\mu'_2}}{\frac{1}{y_1} - \frac{1}{y_2}}.$$

Construction de la formule donnée. — Désignons par P_1 et P_2 les pôles de Δ par rapport à $f=0$, $\varphi=0$; par p_1 et p_2 les projections de ces points sur Δ; par α_1, β_1, α_2, β_2 les intersections des droites P_1p_1, P_2p_2, avec les tangentes issues de O aux coniques polaires de Δ.

Nous aurons visiblement

$$\frac{1}{\mu_1\mu_2} = \frac{\overline{Op_1}^2}{p_1\alpha_1 \times p_1\beta_1}, \qquad \frac{1}{\mu'_1\mu'_2} = \frac{\overline{Op_2}^2}{p_2\alpha_2 \times p_2\beta_2},$$

ou en désignant par γ_1 et γ_2 les orthocentres des triangles $O\alpha_1\beta_1$, $O\alpha_2\beta_2$,

$$\frac{1}{\mu_1\mu_2} = \frac{Op_1}{p_1\gamma_1}, \qquad \frac{1}{\mu'_1\mu'_2} = \frac{Op_2}{p_2\gamma_2}.$$

Menons par O les parallèles à $P_1\gamma_1$, $P_2\gamma_2$ et désignons par P'_1 et P'_2 leurs intersections respectives avec P_1p_1, P_2p_2. nous aurons

$$\frac{1}{\mu_1\mu_2} = \frac{Op_1}{p_1\gamma_1} = \frac{P'_1p_1}{P_1p_1}, \qquad \frac{1}{\mu'_1\mu'_2} = \frac{Op_2}{p_2\gamma_2} = \frac{P'_2p_2}{P_2p_2},$$

d'où

$$\rho = -(m-1)\frac{P'_1p_1 \times P_2p_2 - P'_2p_2 \times P_1p_1}{P_2p_2 - P_1p_1};$$

sous cette forme on voit immédiatement que la droite

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ P_1p_1 & P'_1p_1 & 1 \\ P_2p_2 & P'_2p_2 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

coupe Oy en un point C tel que

$$OC = (m - 1)\rho.$$

D'où la construction suivante :

Soient O *le point de contact de la courbe considérée avec la droite* Δ, P_1 *le pôle de* Δ *par rapport à l'une des courbes de base du faisceau donné*, p_1 *la projection de* P_1 *sur* Δ, *les tangentes menées de* O *à la conique polaire de* O, *par rapport à la courbe de base considérée, coupent* $P_1 p_1$ *en* α_1 *et* β_1 ; *soit* γ_1 *l'orthocentre du triangle* $O\alpha_1\beta_1$, *la parallèle à* $P_1\gamma_1$ *menée par* O *coupe* $P_1 p_1$ *en* P'_1, *la parallèle à* Δ *menée par* P'_1 *coupe la perpendiculaire à* Δ *en* O *au point* K, *prenons sur* KP'_1 *dans le sens* KP'_1 *un segment* $\overline{KR_1} = \overline{P_1 p_1}$ *et construisons de même avec la seconde courbe de base le point* R_2, *la droite* R_1R_2 *coupe* OK *en un point* C *tel que* $OC = (m-1)\rho$, ρ *étant le rayon de courbure cherché.*

Remarque. — La construction précédente s'appliquera immédiatement dans les très nombreux cas où l'équation tangentielle d'une courbe s'écrira

$$P_1P_2\ldots P_n + \lambda Q_1Q_2\ldots Q_n = 0,$$

$P_1P_2\ldots P_n$, $Q_1Q_2\ldots Q_n$ étant des points ou des coniques, différents ou confondus.

En particulier, elle permet de résoudre immédiatement les problèmes suivants :

Construire le rayon de courbure en un point d'une conique dont on connaît cinq tangentes.

Une conique touchant les côtés d'un triangle en α, β, γ, *construire le rayon de courbure en l'un de ces points.*

CERTIFICATS DE MÉCANIQUE RATIONNELLE.

Clermont.

Épreuve théorique. — 1° *Un disque circulaire, homogène, de masse m et de rayon* R, *repose sur un plan*



incliné rugueux, qui fait l'angle i avec le plan horizontal. Le coefficient de frottement de glissement du disque sur le plan est appelé f et l'on néglige le frottement du roulement.

Le disque étant placé dans un plan vertical, tangentiellement à une ligne de plus grande pente, on le lance avec une vitesse de translation quelconque parallèle à cette ligne et une vitesse de rotation quelconque autour de son axe. Déterminer son mouvement. Discuter les différentes phases qui peuvent se présenter, suivant les conditions initiales et suivant la valeur de l'angle i. Déterminer la réaction en M, *dans chaque phase.*

2° *On raccorde le plan incliné avec un plan horizontal* H, de *même nature, au moyen d'une surface cylindrique, également de même nature et dont la section droite est un certain arc de courbe* AB. *On suppose qu'au moment où le disque arrive en* A, *il se trouve dans une période de non-glissement. En admettant que cette absence de glissement persiste, montrer que le disque arrive en* B *avec une vitesse indépendante de la forme de l'arc* AB, *pour une différence donnée entre les niveaux des points* A *et* B.

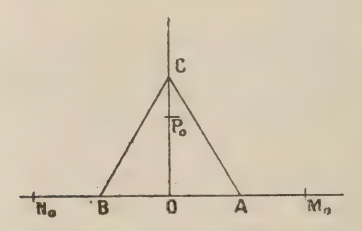
Déterminer le mouvement du disque sur l'arc AB, *en supposant ce dernier circulaire et de rayon* $\rho > R$. *Montrer que ce mouvement est perpendiculaire et calculer la longueur du pendule synchrone.*

3° *Le disque roulant maintenant sur le plan horizontal, avec une vitesse de translation* v, *on imagine qu'il vient heurter un autre disque identique, au repos sur* H *et dans le plan du premier disque. On néglige le frottement des deux disques l'un sur l'autre et on les suppose entièrement dénués d'élasticité. Enfin, on admet qu'ils restent tous deux en contact avec le plan* H. *On demande de calculer leurs vitesses après le choc. Démontrer qu'ils restent ensuite en contact et déterminer leur mouvement ultérieur. Calculer les diverses réactions, dans les différentes phases de ce mouvement.*

(*On admettra que, dès que le glissement d'un des disques sur le plan* H *a cessé, il ne réapparaît plus.*)

Épreuve pratique. — *On donne trois points fixes* A, B, C, *formant un triangle équilatéral, de côté égal à deux et trois mobiles* M, N, P, *de masse commune égale à* 1.

Ces derniers s'attirent deux à deux, suivant des forces



égales à leurs distances mutuelles. De plus, A, B, C *attirent respectivement* M, N, P, *suivant des forces égales à* AM, BN, CP.

1° *Déterminer la position d'équilibre du système.*

2° *Déterminer le mouvement du système, quand on l'abandonne, sans vitesse initiale, dans la position* $M_0N_0P_0$ *telle que*

$$OM_0 = ON_0 = 2, \qquad OP_0 = a.$$

Quel est, en particulier, le mouvement du centre de gra-

vité? On construira les trajectoires de M *et de* N *et l'on décrira le mouvement de* P, *en supposant que* P_0 *est en* O. *On déterminera, en particulier, les époques et positions de rencontre de* M *et de* N. *Enfin, on étudiera les variations de l'énergie cinétique du système.* (Juin 1914.)

Dijon.

Épreuve écrite. — 1° *Pendule conique.*

2° *Équations de Lagrange.*

Épreuve pratique. — *Deux points fixes sont situés dans le même plan horizontal à une distance de* 4^{m}. *Deux fils élastiques identiques ont comme longueur* 1^{m}, *et chacun d'eux est en équilibre lorsqu'il est vertical, une extrémité étant fixe et l'autre supportant un poids de* 100^{g}, *la longueur étant alors de* 2^{m}. *Chaque fil a une extrémité attachée à l'un des points fixes, et l'autre à un point matériel du poids de* 100^{g}, *qui glisse avec frottement sur le plan horizontal. A l'instant initial, cette petite masse est en repos à* 1^{m} *de l'un des points fixes, entre les deux points fixes. On demande de déterminer le coefficient de frottement de façon que le point matériel arrive sans vitesse à égale distance des points fixes. On sait que la tension d'un fil élastique est proportionnelle à l'allongement du fil.* (Novembre 1913.)

Grenoble.

Épreuve théorique. — *Un fil rigide homogène forme le périmètre d'un triangle équilatéral* ABC *de côté* a *de masse* m. *Le côté* BC *peut glisser sur une horizontale fixe* Ox, *le plan* xOy *du triangle reste vertical. Au point* A *est attaché le fil d'un pendule simple* AP *dont la longueur est* $\frac{a}{2}$; *la masse du point* P *est* m, *celle du fil est négligeable. Le pendule oscille dans le plan du triangle.*

Les liaisons sont sans frottement.

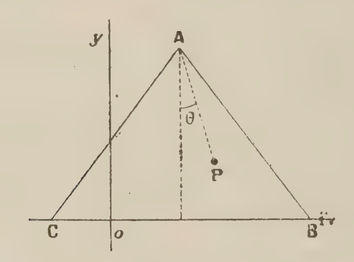
1° *Étudier le mouvement du système en supposant qu'à l'instant initial les vitesses soient nulles et que* P *coïncide avec le milieu de* AB.

2° *Calculer la tension du fil à un instant où il est ver-*

tical; dans les mêmes conditions, déterminer les réactions exercées par Ox, *en supposant qu'elles se réduisent à deux forces* β, γ *appliquées en* B *et* C.

3° *On immobilise brusquement le triangle à un instant où* P *est sur la verticale du point* A. *Déterminer le mouvement ultérieur, la liaison nouvelle étant supposée persistante. Évaluer la force vive perdue.*

Nota. — *Prendre pour paramètres l'abscisse* x *de* A *et*



l'angle θ *de* AP *et de la verticale descendante.*

Épreuve pratique. — *Un carré de côté* l *engendre un double cône en tournant autour d'une de ses diagonales* OO′. *Un solide homogène pesant* S *est limité par ce double cône.*

1° *Déterminer les moments principaux d'inertie de* S *relatifs à son centre de gravité* G *et ceux relatifs au sommet* O.

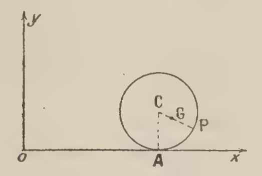
2° *On suppose que* S *est mobile autour du point* O *qui est fixe et qu'à l'instant initial l'axe* OO′ *est horizontal, la vitesse de* O′ *étant nulle. On sait que dans le mouvement ultérieur la distance maximum de* O′ *au plan horizontal passant par* O *est* $l\sqrt{2}\cos\alpha$. *Quelle est la vitesse initiale de rotation de* S *autour de* OO′?

(Juillet 1913.)

Problème. — *Une circonférence homogène se meut dans un plan vertical fixe et repose sur une horizontale fixe* Ox *de ce plan, sur laquelle elle peut glisser et rouler. Un point matériel pesant* P *peut se déplacer sur la*

circonférence; ce point et la circonférence ont même masse M.

1° *Étudier le mouvement du système.*



2° *Calculer les réactions qui s'exercent en* P *et au point* A *de contact de la circonférence et de la droite* Ox.

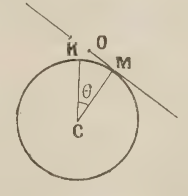
Épreuve pratique. — *Une plaque plane homogène de masse* M, *d'épaisseur négligeable, est limitée par un hexagone régulier de côté* a.

1° *Former l'équation de l'ellipsoïde d'inertie relatif au centre de gravité.*

2° *La plaque se mouvant autour de son centre de gravité supposé fixe est animée d'un mouvement à la Poinsot. Déterminer, pour chacun des deux cônes roulettes fixe et mobile, le demi-angle au sommet, sachant qu'à l'instant initial la rotation instantanée fait un angle de* 30° *avec le plan de la plaque.* (Novembre 1913.)

Lyon.

Composition écrite. — *On donne une circonférence de cercle fixe dans un plan vertical. Soient* C *son centre,* K *l'extrémité supérieure de son diamètre vertical. Une*



tige rectiligne matérielle homogène pesante infiniment mince, de longueur $2l$ *et de centre* O, *est placée tangentiellement en un point* M_0 *de la demi-circonférence supé-*

rieure, et animée d'une vitesse initiale quelconque, de manière cependant que la tige ne sorte pas du plan de la circonférence. On suppose de plus que la circonférence et la tige sont assez rugueuses pour que cette tige ne puisse que rouler sans glisser sur la circonférence et que, quand la tige devient horizontale, elle soit en contact avec la circonférence par son milieu O, *qui vient alors toujours ainsi en* K. *On demande d'étudier le mouvement. Indiquer les différentes méthodes qui peuvent être employées en en justifiant l'usage : mais n'employer effectivement que l'une d'elles pour établir la ou les équations différentielles du mouvement. Celles-ci établies, poursuivre l'étude du mouvement en se bornant au cas des petits mouvements, et par conséquent en considérant comme devant rester constamment petit du premier ordre l'angle* $\theta = \widehat{\mathrm{KCM}}$. (Novembre 1913.)

Composition écrite. — *Un point matériel pesant est assujetti à rester sur la surface d'une sphère; il est attiré par un point de la verticale passant par le centre de la sphère proportionnellement à la distance. Sa vitesse initiale est horizontale. Entre quelles limites varie pendant le mouvement la hauteur du mobile? Déterminer le coefficient d'attraction de façon que la vitesse reste constante, et étudier alors complètement le mouvement.*

(Juin 1914.)

CORRESPONDANCE.

G. Fontené. — *Sur la question* 2288. — Cette question, posée par moi, est manifestement erronée : le lieu du point P a deux points de rebroussement aux centres de courbure situés sur l'axe que l'on considère. Je m'excuse auprès des lecteurs du Journal pour la perte de temps que j'ai pu leur causer.

[M¹5] [M¹6h]

SUR UN RAPPROCHEMENT REMARQUABLE ENTRE L'HYPOCYCLOÏDE A TROIS REBROUSSEMENTS, LE FOLIUM DE DESCARTES ET LA CARDIOÏDE;

Par M. R. GOORMAGHTIGH.

1. Considérons un système d'axes de coordonnées xOy et une courbe (Γ) symétrique par rapport à l'axe Ox; son équation est de la forme $f(x, y^2) = 0$. Considérons, d'autre part, la courbe (Γ') d'équation $f(x, -y^2) = 0$. La transformation qui sert à passer de la courbe (Γ) à la courbe (Γ') n'est autre que la transformation affine, caractérisée par les équations

$$x' = x, \qquad y' = iy; \tag{1}$$

elle fait correspondre à des points imaginaires de (Γ) des points réels de (Γ'), et réciproquement. Les courbes (Γ) et (Γ') étant affines, il existe entre leurs propriétés des relations bien connues. Or, on peut établir, au moyen de cette transformation et d'autres transformations géométriques simples, un rapport entre l'hypocycloïde à trois rebroussements, certaines trisectrices remarquables, le folium de Descartes et la cardioïde. On pourra ainsi déduire, des propriétés connues de l'hypocycloïde à trois rebroussements, plusieurs théorèmes importants concernant le folium de Descartes et la cardioïde.

2. Soit (H_3) une *hypocycloïde à trois rebroussements* dont le cercle tritangent (C_1) a pour centre O et pour rayon r, et dont un des points de rebroussement est le point $(-3r, 0)$. La polaire réciproque de (H_3) par rapport au cercle tritangent

$$x^2+y^2=r^2,$$

est la *trisectrice de G. de Longchamps* (L) ayant pour équation

$$x(x^2-3y^2)-r(x^2+y^2)=0.$$

Si l'on prend la courbe affine de (L), d'après les équations (1), on obtient

$$x(x^2+3y^2)-r(x^2-y^2)=0.$$

Cette équation représente un *folium de Descartes* (F) ayant pour asymptote la droite

$$3x+r=0;$$

l'origine O est le point double et le sommet de la boucle est le point $(r, 0)$.

Considérons maintenant la courbe affine de (F), l'axe d'affinité étant l'axe Ox, le rapport d'affinité étant $\sqrt{3} \div 1$; on obtient ainsi la *trisectrice de Maclaurin* (M) d'équation

$$x(x^2+y^2)+\frac{r}{3}(y^2-3x^2)=0.$$

Considérons enfin le cercle (γ) de rayon $\frac{1}{3}r$ ayant pour centre le point $O'\left(\frac{2}{3}r, 0\right)$. La polaire réciproque de la trisectrice de Maclaurin par rapport à ce cercle est, d'après un théorème de G. de Longchamps [1],

[1] *Rapprochement entre la trisectrice de Maclaurin et la cardioïde* (*Prager Ber.*, 1897).

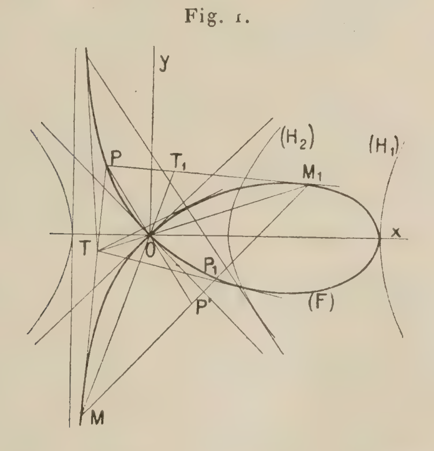
une *cardioïde* (C). Cette cardioïde a pour point de rebroussement le point $\left(\frac{5}{9}r, o\right)$ et pour sommet le point (r, o).

Sur le folium de Descartes [1].

3. Comme applications des remarques qui précèdent, nous déduirons quelques propriétés remarquables du folium de Descartes de celles de l'hypocycloïde à trois rebroussements.

Cherchons d'abord quelles sont les coniques obtenues en transformant le cercle tritangent (C_1) et celui des rebroussements (C_2) de (H_3), comme on a transformé l'hypocycloïde pour en déduire le folium de Descartes. Si l'on transforme (C_1) et (C_2) par polaires réciproques par rapport au cercle (C_1), on obtient le

Fig. 1.



cercle (C_1) lui-même et un cercle concentrique de

[1] On connait peu de propriétés de cette courbe (*Voir* Loria-Schutte, *Spezielle ebene Kurven*, t. I, p. 58).

rayon $\frac{1}{3}r$. On voit, par suite, qu'il correspond au folium (F), comme transformées de (C_1) et (C_2), deux hyperboles équilatères (H_1) et (H_2). L'hyperbole (H_1) a pour centre le point double O et pour asymptotes les tangentes nodales du folium; l'un des sommets de l'axe réel de cette hyperbole est le sommet de la boucle. L'hyperbole (H_2) est homothétique de (H_1) par rapport à O, le rapport d'homothétie étant 1 : 3 (*fig.* 1).

4. La tangente en un point d'une hypocycloïde à trois rebroussements coupe la courbe en deux points, qui sont les points *associés* du point considéré; les tangentes en ces points sont rectangulaires, leur intersection appartient au cercle tritangent et le point de ce cercle diamétralement opposé à cette intersection appartient à la première tangente considérée.

Si l'on transforme ce théorème par polaires réciproques, on obtient la propriété suivante de la trisectrice (L) : si, d'un point de la trisectrice, on mène les tangentes à la courbe, autres que celle au point considéré, la corde de contact est vue du point O sous un angle droit et enveloppe le cercle (C_1); cette corde passe par le symétrique par rapport à O du point considéré de la trisectrice.

Passons ensuite au folium de Descartes; remarquons qu'à deux rayons perpendiculaires du cercle (C_1) correspondent, pour une conique affine, deux demi-diamètres conjugués et que, pour une hyperbole équilatère, deux directions conjuguées sont symétriques par rapport aux asymptotes. Nous aurons donc le théorème suivant :

Si deux points M *et* M_1 *d'un folium de Descartes sont tels que les droites qui les joignent au point*

double sont symétriques par rapport aux tangentes nodales, les tangentes en ces points se coupent en un point P *de la courbe et la corde* MM_1 *enveloppe une hyperbole équilatère dont les asymptotes sont les tangentes nodales; cette corde contient le symétrique* P′ *de* P *par rapport à* O.

On verra plus loin que P′ est le milieu de MM_1.

5. On sait que la développée de l'hypocycloïde (H_3) est une autre hypocycloïde à trois rebroussements homothétique de (H_3) par rapport à O, le rapport d'homothétie étant 3 : 1. On déduit de là que le lieu des points d'intersection de la tangente en un point de la trisectrice (L) avec la perpendiculaire élevée en O sur la droite qui joint ce dernier point au point considéré de (L) est la courbe homothétique de (L) par rapport à O, le rapport d'homothétie étant 1 : 3. On a, par suite, cette propriété du folium de Descartes :

Le lieu de l'intersection de la tangente en un point M *du folium avec la symétrique de* OM *par rapport aux tangentes nodales est un folium homothétique du folium considéré par rapport à* O, *le rapport d'homothétie étant* 1 : 3.

Appelons T le point où la droite OM_1 rencontre la tangente au folium au point M, T_1 le point où la droite OM rencontre la tangente au folium au point M_1. On a

$$3\,OT = OM_1, \qquad 3\,OT_1 = OM, \qquad PO = OP'$$

et, par suite,

$$MP' = P'M_1, \qquad MP = 3\,TP, \qquad M_1P = 3\,T_1P.$$

On déduit de là ces théorèmes :

Si deux points M *et* M_1 *d'un folium de Descartes sont tels que* OM *et* OM_1 *sont symétriques par rapport aux tangentes nodales, le milieu de* MM_1 *décrit le folium symétrique du folium donné par rapport au point double.*

Si la tangente en un point d'un folium de Descartes recoupe la courbe au point P, *le lieu du point* T *situé au tiers du segment* PM *à partir de* P *est un autre folium de Descartes.*

6. La normale en un point quelconque de l'hypocycloïde recoupe la courbe en trois points, dont deux sont imaginaires; les tangentes en ces trois points concourent sur le cercle des rebroussements (C_2). En transformant cette propriété on voit que si, du point T, on mène au folium les tangentes autres que la tangente MP, les points de contact de ces tangentes appartiennent à une tangente à l'hyperbole (H_2).

Le lieu des points d'où l'on peut mener au folium de Descartes trois tangentes dont les points de contact sont collinéaires est le folium de Descartes homothétique du folium considéré par rapport au point double, le rapport d'homothétie étant 1 : 3.

La droite qui joint les points de contact enveloppe l'hyperbole équilatère (H_2).

7. A trois normales concourantes de l'hypocycloïde correspondent, pour le folium, trois points T collinéaires; il suffit pour cela que les points M_1 correspondants soient collinéaires. Or, on sait que la normale en un point de l'hypocycloïde à trois rebroussements et celles aux points associés concourent en un point du cercle des rebroussements. On déduit de là une pro-

priété qui complète le théorème du paragraphe 4. Si l'on désigne par R le point où la tangente en P au folium recoupe la courbe, le point situé au tiers de PR à partir de R appartient à la droite TT_1. Il résulte de là que, si l'on appelle P_1 le point où le symétrique de OP par rapport aux tangentes nodales recoupe le folium, ce point P_1 appartient à la droite MM_1.

Si d'un point P *du folium on mène deux tangentes* PM, PM_1 *à la courbe, la corde de contact contient le point où le symétrique de* OP *par rapport aux tangentes nodales recoupe la courbe.*

8. *Coniques tritangentes au folium de Descartes.* — On sait que les normales à l'hypocycloïde (H_3) aux points de contact de la courbe avec une conique tritangente sont concourantes. On déduit de là, en tenant compte des remarques qui précèdent, la proposition suivante :

Si M, M′, M″ *sont les points de contact du folium de Descartes avec une conique tritangente, les points* M_1, M'_1, M''_1 *où les symétriques de* OM, OM′, OM″ *par rapport aux tangentes nodales recoupent la courbe sont collinéaires.*

Si les normales en trois points d'une hypocycloïde à trois rebroussements sont concourantes, leurs points associés appartiennent à une conique. On a donc, pour le folium de Descartes, la propriété suivante :

Les tangentes menées de M, M′, M″ *au folium sont tangentes à une conique.*

Nous avons montré [1] que, lorsque le centre d'une

---

[1] *Nouvelles Annales*, octobre 1913.

conique tritangente à une hypocycloïde à trois rebroussements (H_3) décrit une droite d, cette conique passe par un point fixe qui appartient à la tangente à (H_3) perpendiculaire à d. Par suite, si une telle conique passe par un point fixe, le lieu de son centre se compose de trois droites. Si l'on transforme cette propriété par polaires réciproques, on voit que, si une conique tritangente à la trisectrice (L) reste tangente à une droite fixe, l'enveloppe de la polaire de O par rapport à cette conique se compose de trois points.

Passant ensuite de la courbe (L) à la courbe (F), on a ce théorème :

Si une conique tritangente à un folium de Descartes reste tangente à une droite fixe, l'enveloppe de la polaire du point double par rapport à cette conique se compose de trois points fixes.

Sur la cardioïde.

9. En utilisant les propriétés du folium de Descartes que nous venons de déduire de celles de l'hypocycloïde à trois rebroussements, on peut obtenir, au moyen des transformations indiquées au paragraphe 2, des théorèmes intéressants concernant la cardioïde.

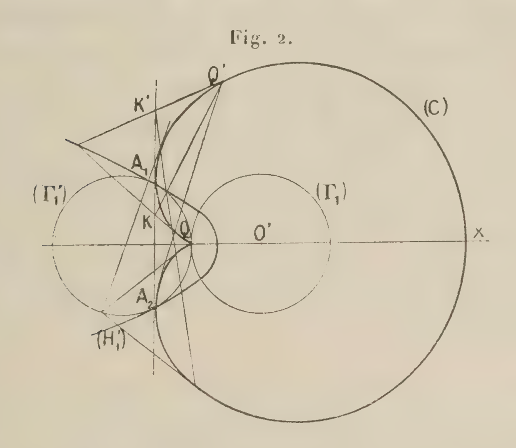
Appliquons d'abord aux hyperboles (H_1) et (H_2) les transformations par lesquelles nous avons déduit la cardioïde (C) du folium (F). L'hyperbole affine de (H_1) correspondant à la trisectrice de Maclaurin (M) a pour équation

$$3x^2 - y^2 = 3r^2.$$

On déduit ensuite de là, par un calcul simple, qu'à la cardioïde (C) correspond, comme transformée de (H_1), une autre hyperbole (H'_1). L'un des sommets de l'axe

réel de celle-ci est le sommet de la cardioïde (C), l'autre est le point situé au dixième de la distance du point de rebroussement au sommet de (C). L'hyperbole (H'_1) passe par les points de contact A_1 et A_2 de la cardioïde avec sa tangente double; les tangentes

Fig. 2.



à (H'_1) en ces points se coupent au foyer singulier O′ de la cardioïde (*fig.* 2).

Considérons de même l'hyperbole (H_2); à la trisectrice de Maclaurin correspond, comme transformée de (H_2), l'hyperbole

$$9x^2 - 3y^2 = r^2. \tag{2}$$

Soit (Γ_1) le cercle de base de la cardioïde considérée comme conchoïde et (Γ'_1) le symétrique de ce cercle par rapport au rebroussement de (C). On montre aisément que, si l'on applique à l'hyperbole (2) la transformation par polaires réciproques qui fait correspondre la cardioïde (C) à la trisectrice (M), on obtient le cercle (Γ'_1).

10. Nous avons considéré (§ 4) les couples de

points M, M_1 du folium de Descartes, tels que les droites OM, OM_1 sont symétriques par rapport aux tangentes nodales. A ces deux points M et M_1 correspondent sur la trisectrice (M) deux points μ et μ' tels que $O\mu$ et $O\mu'$ sont conjugués par rapport à l'hyperbole (2). Or, le cercle (Γ'_1), polaire réciproque de cette hyperbole par rapport au cercle (γ), passe par les points A_1 et A_2, et la tangente double A_1A_2 de la cardioïde est la polaire de O par rapport au cercle (γ). On déduit de là qu'aux points M et M_1 du folium de Descartes correspondent deux tangentes de la cardioïde divisant harmoniquement le segment A_1A_2.

Des propriétés du folium de Descartes trouvées au paragraphe 4, découle donc, pour la cardioïde, le théorème suivant :

Une tangente à la cardioïde coupe la courbe en deux points; les tangentes en ces points divisent harmoniquement le segment compris entre les points de contact de la cardioïde avec sa tangente double.

Le lieu de l'intersection de ces tangentes est une hyperbole.

11. Du théorème du paragraphe 6, on déduit ensuite cette propriété :

Le lieu des points d'où l'on peut mener à une cardioïde trois tangentes dont les points de contact sont collinéaires est le cercle symétrique par rapport au rebroussement du cercle fondamental de la cardioïde considérée comme conchoïde [1].

---

(1) M. G. Loria a donné comme lieu de ce point le cercle fondamental (*Spezielle ebene Kurven*, t. I, p. 155). Ce résultat est inexact; on le montre facilement d'ailleurs en vérifiant les calculs résumés dans cet Ouvrage.

On peut d'ailleurs aisément construire des droites telles que les tangentes en trois de leurs points d'intersection avec la cardioïde soient concourantes. Soit, en effet, Q le point de contact de la cardioïde avec la polaire du point μ par rapport au cercle (γ). Cette polaire coupe la tangente double $A_1 A_2$ en un point K, dont le conjugué harmonique K' par rapport aux points A_1, A_2 est le pôle de la droite $O\mu'$ par rapport au cercle (γ). Par conséquent, la droite QK' est la polaire du point d'intersection τ de $O\mu'$ avec la tangente en μ à la trisectrice (M). Puisque le point τ correspond à T dans la transformation affine par laquelle on déduit (M) de (F), on peut mener de ce point à la trisectrice (M) trois tangentes dont les points de contact sont collinéaires. On a donc le théorème suivant :

Soit K' *le conjugué harmonique, par rapport aux points de contact de la cardioïde avec sa tangente double, du point d'intersection* K *de cette tangente double avec la tangente en un point quelconque* Q *de la cardioïde. La droite* QK' *recoupe la courbe en trois points; les tangentes en ces points sont concourantes.*

12. Au moyen des considérations qui précèdent on déduit encore du paragraphe 8 les théorèmes suivants :

Les tangentes menées d'un point à la cardioide coupent la tangente double en α, β, γ; *soient* α', β', γ' *les conjugués harmoniques de* α, β, γ *par rapport aux points* A_1 *et* A_2, *et* $\alpha'', \beta'', \gamma''$ *les points de contact des tangentes menées de* α', β', γ' *à la courbe. Les points* $\alpha'', \beta'', \gamma''$ *sont les points de contact d'une co-*

nique tritangente à la cardioïde, et les droites $\alpha\alpha''$, $\beta\beta''$, $\gamma\gamma''$ *sont concourantes.*

En particulier :

Si de deux points K *et* K′ *de la tangente double, conjugués harmoniques par rapport aux points de contact de celle-ci avec la cardioïde, on mène deux tangentes qui touchent la courbe en* Q *et* Q′, *les droites* KQ′ *et* K′Q *se coupent sur le cercle, symétrique par rapport au rebroussement, du cercle fondamental de la cardioïde considérée comme conchoïde.*

Si l'on observe enfin que la polaire de O par rapport au cercle (γ) est la tangente double de la cardioïde, on a ce théorème :

Le lieu des pôles de la tangente double de la cardioïde par rapport aux coniques tritangentes à la courbe passant par un point fixe se compose de trois droites.

[O[1]8a]

MOUVEMENT D'UNE FIGURE PLANE LIÉE A DEUX COURBES ROULANT SUR DES ROULEAUX ;

Par M. R. BRICARD.

1. Il y a quelques années, M. le lieutenant A. Bienaymé a publié ici même [1] une intéressante étude du mou-

---

[1] *Essai sur le déplacement d'un madrier sur deux rouleaux non parallèles* (*Nouvelles Annales*, 4e série, t. III, 1903, p. 485).

vement d'une droite roulant sur deux rouleaux non parallèles (mouvement qu'on réalise aisément au moyen d'une règle dont on appuie une arête sur deux crayons, roulant eux-mêmes sur une table). Un des résultats les plus saillants obtenus par cet auteur est que *l'aire du triangle formé par la droite et par les axes des rouleaux* (*en projection sur le plan de roulement*) *a une valeur constante.*

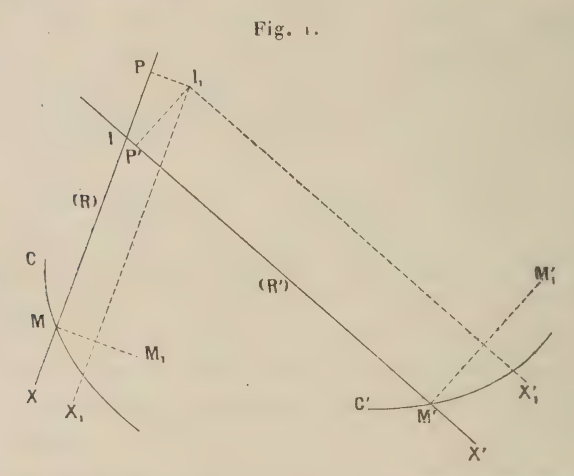
On peut, plus généralement, se proposer d'étudier le mouvement d'une figure plane (F) dans son plan, le mouvement étant défini par cette condition que deux courbes de la figure roulent chacune sur un rouleau. Les deux rouleaux sont des cylindres de révolution égaux qui roulent tous les deux sur un plan parallèle au plan de (F). On pourrait supposer plus généralement que ces rouleaux ont des rayons différents, mais alors ils devraient rouler sur des plans distincts, de manière que le plan de (F) pût glisser sur lui-même. La généralisation n'est d'ailleurs que fictive, comme on le reconnaît aisément, et ne conduit à aucun résultat différant de ceux que nous allons obtenir.

2. Il faut d'abord définir avec précision le roulement d'une courbe sur une surface, dans les conditions les plus générales. Soient (S) et C une surface et une courbe, mobiles toutes les deux en général, et cela de manière à rester constamment tangentes. *On dit que* C *roule sur* (S) *si, à un moment quelconque, le vecteur vitesse de leur point de contact est le même, que l'on considère ce point comme lié à la courbe ou à la surface.*

Cela posé, soient C et C' les courbes de (F) qui roulent respectivement sur les rouleaux R et R' (*fig.* 1). Soient X et X' les axes de ceux-ci. Les points de con-

tact M et M′, de C et de C′ avec les rouleaux correspondants sont respectivement, en projection sur le plan de la figure, sur X et sur X′.

Fig. 1.



Déplaçons la figure (F). La vitesse du point M, considéré comme appartenant à R, est évidemment perpendiculaire à X. Il en est donc de même, en vertu du principe énoncé plus haut, de la vitesse du point M considéré comme appartenant à C, c'est-à-dire à (F). De même la vitesse du point M′ de (F) est perpendiculaire à X′. *Il résulte immédiatement de là que le centre instantané de rotation de la figure* (F) *est le point* I, *intersection de* X *et de* X′.

Au cours du mouvement, l'axe X éprouve une translation, dont la vitesse est évidemment la moitié de celle du point M. De même pour l'axe X′ et le point M′.

Ces simples considérations suffisent pour traiter le problème proposé, comme on le verra plus loin. Mais il n'est pas sans intérêt de signaler ici une propriété importante du mouvement envisagé.

Cherchons la tangente au lieu du point I. A cet effet,

désignons par $d\varphi$ l'angle de la rotation autour du point I qui constitue le déplacement infinitésimal de (F), à partir de sa position actuelle. Le point M vient en M_1, MM_1 étant perpendiculaire à X, le point M' vient en M'_1, $M'M'_1$ étant perpendiculaire à X', et l'on a

$$MM_1 = IM\,d\varphi, \qquad M'M'_1 = IM'\,d\varphi.$$

Les axes X et X' sont venus en X_1 et X'_1, ayant subi des translations dont les valeurs sont respectivement $\frac{1}{2}MM_1$ et $\frac{1}{2}M'M'_1$, d'après la remarque faite plus haut. Soient I_1 le point de rencontre de X_1 et de X'_1, P et P' ses projections respectives sur X et sur X'. On a

$$(1) \qquad I_1P = \frac{1}{2}IM\,d\varphi, \qquad I_1P' = \frac{1}{2}IM'\,d\varphi,$$

d'où

$$\frac{\sin\widehat{PII_1}}{\sin\widehat{P'II_1}} = \frac{I_1P}{I_1P'} = \frac{IM}{IM'} = \frac{\sin\widehat{IM'M}}{\sin\widehat{IMM'}}.$$

Mais comme

$$\widehat{PII_1} + \widehat{P'II_1} = \widehat{IM'M} + \widehat{IMM'},$$

cela exige

$$\widehat{PII_1} = \widehat{IM'M}, \qquad \widehat{P'II_1} = \widehat{IMM'}.$$

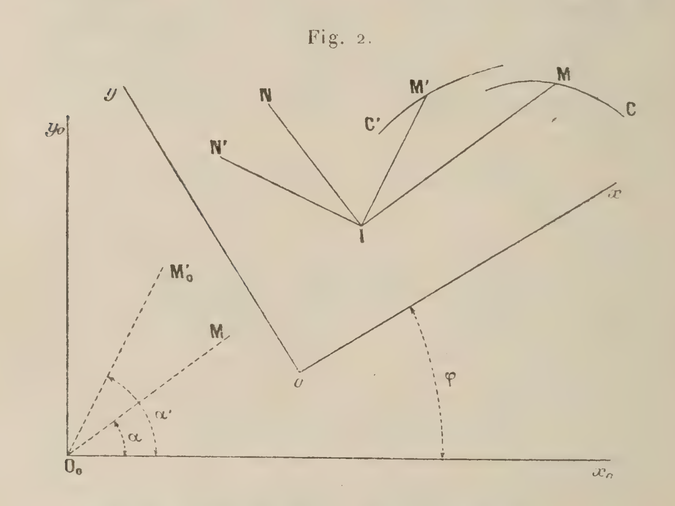
On en conclut immédiatement *que* II_1, *c'est-à-dire la tangente au lieu du point* I, *se confond avec la tangente au cercle* IMM'. Telle est la construction simple demandée.

On peut également chercher les tangentes aux lieux des points de contact M et M' des courbes C et C' avec les rouleaux correspondants (il s'agit, bien entendu, des courbes engendrées par les points qui sont *succes-*

sivement points de contact). On reconnaît que la tangente au lieu du point M, par exemple, est la symétrique par rapport à X de la tangente en M à C. Je ne m'attarderai pas à établir ce résultat, établi, ainsi du reste que celui qui précède, par M. Bienaymé, dans le cas particulier où les courbes C et C′ se réduisent à une même droite.

3. Abordons maintenant le problème posé au nº 1. Soient (*fig.* 2) Ox, Oy deux axes rectangulaires

Fig. 2.



entraînés avec les courbes C et C′, O_0x_0 et O_0y_0 deux axes fixes, O_0M_0 et $O_0M'_0$ deux demi-droites parallèles aux axes IM et IM′ des rouleaux sur lesquelles roulent les courbes C et C′. Appelons φ l'angle $(\widehat{O_0x_0, Ox})$, α et α' les angles constants $(\widehat{O_0x_0, O_0M_0})$ et $(\widehat{O_0x_0, O_0M'_0})$.

Soient x, y les coordonnées du centre instantané de rotation I par rapport aux axes mobiles, ρ et ρ' les longueurs IM et IM′, susceptibles de signes, puisqu'elles

sont portées par des droites orientées. ρ et ρ' sont des fonctions, de formes connues, des quantités x, y et φ.

Nous allons exprimer analytiquement les propriétés traduites au n° 2 par les égalités (1). Comme la question étudiée est géométrique, on peut supposer que le mouvement a lieu de manière que la vitesse angulaire $\frac{d\varphi}{dt}$ soit constamment égale à l'unité. Dans ces conditions, les égalités (1) expriment que les composantes de la vitesse du point I [1], suivant les directions IN et IN' qui font l'angle $\frac{\pi}{2}$ respectivement avec IM et IM', ont pour valeurs $\frac{1}{2}\rho$ et $\frac{1}{2}\rho'$ (en grandeur et en signe). Ces propriétés ont été établies en ce qui concerne la vitesse absolue du point I. Mais en vertu d'une propriété fondamentale du centre instantané de rotation, *elles sont également vraies en ce qui concerne sa vitesse relative.*

Or, la vitesse relative du point I a pour composantes, suivant Ox et Oy,

$$\frac{dx}{dt} = \frac{dx}{d\varphi}, \qquad \frac{dy}{dt} = \frac{dy}{d\varphi}.$$

Sa composante suivant IN est donc

$$\begin{aligned} &\frac{dx}{d\varphi}\cos\left(\alpha - \varphi + \frac{\pi}{2}\right) + \frac{dy}{d\varphi}\cos(\alpha - \varphi) \\ &= \frac{dx}{d\varphi}\sin(\varphi - \alpha) + \frac{dy}{d\varphi}\cos(\varphi - \alpha) \end{aligned}$$

---

[1] Il s'agit, bien entendu, de la vitesse du point, mobile par rapport à la figure mobile comme par rapport à la figure fixe, qui devient successivement centre instantané de rotation pour les diverses positions de la première figure.

et sa composante suivant IN′ est de même

$$\frac{dx}{d\varphi}\sin(\varphi - \alpha') + \frac{dy}{d\varphi}\cos(\varphi - \alpha').$$

On a donc

$$(2)\qquad \left\{\begin{aligned} \frac{dx}{d\varphi}\sin(\varphi - \alpha) + \frac{dy}{d\varphi}\cos(\varphi - \alpha) &= \frac{1}{2}\rho, \\ \frac{dx}{d\varphi}\sin(\varphi - \alpha') + \frac{dy}{d\varphi}\cos(\varphi - \alpha') &= \frac{1}{2}\rho'. \end{aligned}\right.$$

On a là un système de deux équations différentielles linéaires en x et y, dont l'intégration fait connaître x et y en fonction de φ.

On connaît ainsi le lieu du point I par rapport au système mobile, c'est-à-dire la *courbe roulante* du mouvement considéré.

La solution du problème s'achève aisément. Soient, en effet, ξ, η les coordonnées du point O par rapport aux axes fixes; les coordonnées relatives x, y du centre instantané de rotation I satisfont aux relations connues

$$(3)\qquad \left\{\begin{aligned} \frac{d\xi}{d\varphi} - x\sin\varphi - y\cos\varphi &= 0, \\ \frac{d\eta}{d\varphi} + x\cos\varphi - y\sin\varphi &= 0, \end{aligned}\right.$$

et ses coordonnées absolues x_0, y_0 sont données par les formules

$$(4)\qquad \left\{\begin{aligned} x_0 &= \xi - \frac{d\eta}{d\varphi}, \\ y_0 &= \eta + \frac{d\xi}{d\varphi}; \end{aligned}\right.$$

x et y étant connus en fonction de φ, les formules (3)

donnent ξ et η par les quadratures

$$(5)\quad \begin{cases} \xi = \int (x \sin\varphi + y \cos\varphi)\, d\varphi, \\ \eta = \int (-x \cos\varphi + y \sin\varphi)\, d\varphi, \end{cases}$$

et les formules (4) permettent ensuite de construire la courbe base, lieu du point I dans le plan fixe.

L'intégration du système (2) présentera le plus souvent de grandes difficultés, comme le montre l'étude du cas, cependant l'un des plus simples, *a priori*, traité par M. Bienaymé.

4. Voici un exemple assez intéressant. *Supposons que les courbes* C *et* C′ *se réduisent à deux droites faisant entre elles un angle égal à celui des rouleaux correspondants.* On peut supposer que C′ se confond avec Ox, la droite C passant par le point O et faisant un angle α avec Ox. La droite $O_0 M'_0$ sera supposée coïncider avec $O_0 x_0$, $O_0 M_0$ faisant l'angle α avec $O_0 x_0$. Écrivons les équations (2). En vertu de l'hypothèse, il faut faire dans la seconde $\alpha' = 0$.

Calculons ρ. Il faut écrire que le point M est sur la droite C, ce qui donne

$$\cos\alpha[y + \rho \sin(\alpha - \varphi)] = \sin\alpha[x + \rho\cos(\alpha - \varphi)],$$

ou

$$\rho[\sin\alpha\cos(\alpha-\varphi) - \cos\alpha\sin(\alpha - \varphi)] = \rho\sin\varphi = y\cos\alpha - x\sin\alpha,$$

et

$$\rho = \frac{y\cos\alpha - x\sin\alpha}{\sin\varphi}.$$

La première des équations (2) est donc

$$(6)\quad \frac{dx}{d\varphi}\sin(\varphi - \alpha) + \frac{dy}{d\varphi}\cos(\varphi - \alpha) = \frac{1}{2}\,\frac{y\cos\alpha - x\sin\alpha}{\sin\varphi}.$$

La seconde s'en déduit immédiatement en remplaçant α par zéro, ce qui donne

$$(7) \qquad \frac{dx}{d\varphi}\sin\varphi + \frac{dy}{d\varphi}\cos\varphi = \frac{1}{2}\,\frac{y}{\sin\varphi}.$$

Retranchons de l'équation (6) l'équation (7) multipliée par $\cos\alpha$. Il vient, en supprimant le facteur $\sin\alpha$,

$$(8) \qquad -\frac{dx}{d\varphi}\cos\varphi + \frac{dy}{d\varphi}\sin\varphi = -\frac{1}{2}\,\frac{x}{\sin\varphi}.$$

Il faut intégrer le système des équations différentielles (7) et (8). Avant de le faire, remarquons tout de suite que ce système est indépendant de α. On aurait donc obtenu le même système en remplaçant les droites C et O_0M_0 par deux droites C' et $O_0M'_0$, inclinées d'un même angle quelconque α', respectivement sur Ox et sur O_0x_0. Il revient au même de dire que, dans le mouvement considéré, toute droite de la figure mobile, passant par le point O, roule sur un rouleau faisant avec O_0x_0 le même angle que cette droite fait avec Ox. On peut énoncer comme il suit ce résultat, susceptible d'une vérification expérimentale assez simple :

Un faisceau de droites, de grandeur constante, peut recevoir un mouvement tel que chacune de ses droites roule sur un rouleau roulant lui-même sur un plan, et les axes des rouleaux restant parallèles aux droites d'un faisceau fixe égal au faisceau considéré. Ces axes forment d'ailleurs eux-mêmes un faisceau à un moment quelconque (puisqu'ils doivent tous passer par le centre instantané de rotation correspondant).

Revenons à l'intégration du système des équations (7)

et (8). Pour la faire rapidement, multiplions la seconde par $i=\sqrt{-1}$ et ajoutons à la première. Il vient

$$\left(\frac{dx}{d\varphi}+i\frac{dy}{d\varphi}\right)\sin\varphi+\left(\frac{dy}{d\varphi}-i\frac{dx}{d\varphi}\right)\cos\varphi=\frac{y-ix}{2\sin\varphi},$$

ou encore

$$\left(\frac{dy}{d\varphi}-i\frac{dx}{d\varphi}\right)(\cos\varphi+i\sin\varphi)=\frac{y-ix}{2\sin\varphi},$$

ou enfin

$$\frac{\frac{d}{d\varphi}(y-ix)}{y-ix}=\frac{1}{2\sin\varphi(\cos\varphi+i\sin\varphi)}=\frac{\cos\varphi-i\sin\varphi}{2\sin\varphi},$$

et en intégrant

$$\mathrm{L}(y-ix)=\mathrm{LK}+i\theta+\frac{1}{2}\mathrm{L}\sin\varphi-\frac{i}{2}\varphi,$$

$\mathrm{LK}+i\theta$ étant une constante, en général imaginaire, et mise sous une forme commode pour la suite des calculs. On tire de là

$$y-ix=\mathrm{K}\sqrt{\sin\varphi}\,e^{i\left(\theta-\frac{\varphi}{2}\right)},$$

et, en séparant le réel de l'imaginaire,

$$x=\mathrm{K}\sqrt{\sin\varphi}\sin\left(\frac{\varphi}{2}-\theta\right),$$

$$y=\mathrm{K}\sqrt{\sin\varphi}\cos\left(\frac{\varphi}{2}-\theta\right).$$

On reconnaît aisément que ces équations représentent une *lemniscate* ayant son point double à l'origine, c'est-à-dire au sommet du faisceau mobile. Telle est donc la courbe roulante du mouvement.

Pour achever, il faut appliquer les formules (5). Observons d'abord que l'on peut supposer que les axes Ox et Oy sont les tangentes au point double de

la lemniscate, ce qui revient, on le voit aisément, à faire $\theta = 0$. On a alors

$$x \sin\varphi + y \cos\varphi = \mathrm{K}\sqrt{\sin\varphi}\left(\sin\varphi \sin\frac{\varphi}{2} + \cos\varphi \cos\frac{\varphi}{2}\right)$$

$$= \mathrm{K}\sqrt{\sin\varphi} \cos\frac{\varphi}{2},$$

$$-x \cos\varphi + y \sin\varphi = \mathrm{K}\sqrt{\sin\varphi}\left(-\cos\varphi \sin\frac{\varphi}{2} + \sin\varphi \cos\frac{\varphi}{2}\right)$$

$$= \mathrm{K}\sqrt{\sin\varphi} \sin\frac{\varphi}{2},$$

d'où

$$\xi = \mathrm{K}\int \sqrt{\sin\varphi} \cos\frac{\varphi}{2}\, d\varphi, \qquad \eta = \mathrm{K}\int \sqrt{\sin\varphi} \sin\frac{\varphi}{2}\, d\varphi.$$

Ces intégrales sont elliptiques, comme on le voit tout de suite par le changement de variable

$$e^{i\frac{\varphi}{2}} = t.$$

La courbe base du mouvement, c'est-à-dire le lieu du point (x_0, y_0), est donnée par les formules (4), comme on l'a vu.

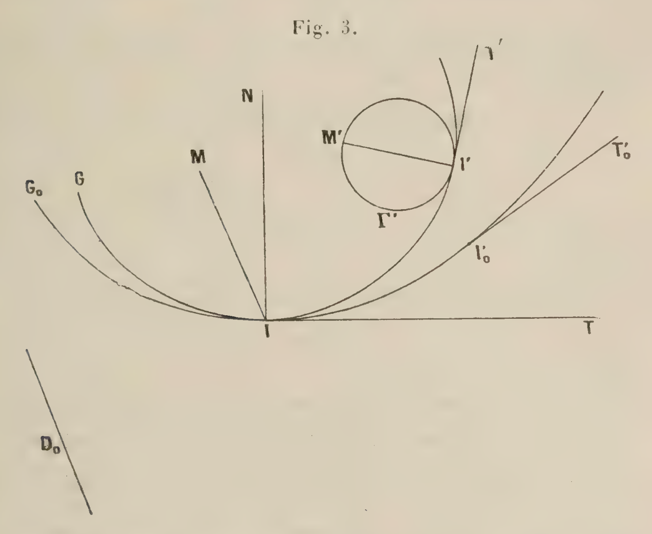
5. L'exemple précédent met en évidence l'existence d'un mouvement plan, au cours duquel une infinité de droites de la figure mobile roulent chacune sur un rouleau. Je vais montrer qu'il n'y a là qu'un cas particulier d'une proposition générale, dont voici l'énoncé :

Étant donné un mouvement plan quelconque, il existe dans la figure mobile une infinité de courbes dont chacune peut être considérée comme roulant sur un rouleau, qui roule lui-même sur un plan. Toutes ces courbes se déterminent d'ailleurs sans quadrature.

J'établirai cela par un raisonnement géométrique.

Considérons un mouvement défini par le roulement de la courbe G sur la courbe G_0, et cherchons une courbe C, liée à G, qui, au cours du mouvement, roule sur un rouleau dont l'axe est parallèle à la droite fixe D_0 (*fig.* 3). Au moment où le centre instantané de rotation

Fig. 3.



est en I, le point de contact M de C et du rouleau doit être tel (n° 2) que IM soit parallèle à D_0, et il faut en outre que la projection du déplacement infinitésimal du point I sur la tangente à la trajectoire du point M soit moitié du déplacement de ce dernier point.

Soient ds le déplacement du point I sur G_0, $d\varphi$ l'angle de la rotation autour de I qui constitue le déplacement élémentaire de la figure mobile, R et R_0 les rayons de courbure des courbes G et G_0 au point I. L'angle $d\varphi$ est, comme il est bien connu, et d'ailleurs évident, la différence des angles de contingence des courbes G_0 et G. On a donc

$$d\varphi = ds\left(\frac{1}{R_0} - \frac{1}{R}\right).$$

D'autre part, le déplacement du point M est égal à $\mathrm{IM}\,d\varphi$ et la projection du déplacement du point I sur la tangente à la trajectoire du point M est

$$ds \cos\left[\left(\widehat{\mathrm{IT},\mathrm{IM}}\right)+\frac{\pi}{2}\right]=-\,ds\sin\left(\widehat{\mathrm{IT},\mathrm{IM}}\right),$$

IT étant la tangente commune aux courbes G et G_0. On a donc

$$\mathrm{IM}\,d\varphi=-\,2\,ds\sin\left(\widehat{\mathrm{IT},\mathrm{IM}}\right),$$

ou

$$\mathrm{IM}\left(\frac{1}{R_0}-\frac{1}{R}\right)=-\,2\sin\left(\widehat{\mathrm{IT},\mathrm{IM}}\right)$$

et enfin

$$\mathrm{IM}=2\frac{RR_0}{R_0-R}\sin\left(\widehat{\mathrm{IT},\mathrm{IM}}\right)=2\frac{RR_0}{R_0-R}\cos\widehat{\mathrm{NIM}},$$

IN étant la normale en I.

On en déduit immédiatement que le point M doit se trouver sur un cercle tangent en I à G_0 et G et ayant pour rayon $\frac{RR_0}{R_0-R}\cdot$ Ce cercle n'est autre que celui qu'on appelle *cercle de roulement,* et dont l'importance résulte du fait que, pour la fonction considérée de G, la distribution des centres de courbure des trajectoires des points de la figure mobile est la même que si le cercle de roulement roulait sur IT.

En vue d'abréger, j'ai passé rapidement sur les questions de signe, dans le raisonnement qui précède. Il serait facile de le compléter sous ce rapport.

La démonstration du théorème énoncé est maintenant immédiate. En chaque point de la courbe G, par exemple au point I′, construisons le cercle Γ′ qui deviendra cercle de roulement, quand le point I′ deviendra centre instantané de rotation. Déterminons ensuite le point M′ tel qu'à ce même moment I′M′

devienne parallèle à D_0. A cet effet, marquons sur G_0 le point I'_0 avec lequel viendra se confondre I' (arc $II'_0 =$ arc II'). Soient $I'T'$ et $I'_0T'_0$ les tangentes en I' et en I'_0. La direction de $I'M'$ est évidemment donnée par la relation

$$\widehat{I'T', I'M'} = \widehat{I'_0T'_0, D_0}.$$

Le lieu du point M', ainsi déterminé, est une courbe C jouissant de la propriété énoncée.

A chaque direction donnée D_0 correspond une telle courbe C et une seule.

Un cas particulier remarquable est celui où le mouvement donné est *un mouvement cycloïdal:* la courbe G se confondant avec le cercle de roulement pour toutes les positions de la figure, toutes les courbes C se confondent aussi avec G. Autrement dit :

Quand un cercle roule sur une droite, ce cercle roule aussi sur une infinité de rouleaux dont les axes, à un moment quelconque, passent par le centre instantané de rotation.

La réciproque est peut-être plus frappante, et le lecteur, après ce qui précède, n'aura nulle peine à l'établir. Elle s'énonce ainsi :

Assujettissons un cercle horizontal à rouler sur deux rouleaux horizontaux, dont les axes, à un certain moment, se coupent en un point du cercle : 1° *au cours du mouvement, cette propriété ne cessera pas d'avoir lieu;* 2° *on peut, sans gêner le mouvement du cercle, le faire rouler sur un nombre quelconque de rouleaux dont les axes concourent avec ceux des deux premiers;* 3° *le mouvement du cercle est le même que s'il roulait sur une droite, lieu du point de concours des axes des rouleaux.*

Je signalerai enfin la recherche des courbes C dans *un mouvement épicycloïdal*. On vérifiera que ce sont des *épicycloïdes*.

6. Les roulements de courbes sur des surfaces peuvent donner lieu à bien d'autres problèmes intéressants. Je me contenterai de signaler en terminant une propriété dont la démonstration est immédiate et qui peut être susceptible d'applications : Imaginons un nombre quelconque de rouleaux cylindriques égaux, dont les axes *fixes* (les rouleaux reposant sur des coussinets) forment un faisceau plan. Une courbe *plane quelconque* peut être déplacée de manière à rouler sans glissement sur tous ces rouleaux, et son mouvement n'est autre qu'une rotation autour du centre du faisceau.

On peut construire par exemple une plaque tournante, dont le bord repose sur des rouleaux à axes concourants. La plaque n'a pas besoin d'être ronde pour fonctionner d'une manière satisfaisante.

[I15]

PROPRIÉTÉ DE CERTAINES FORMES QUADRATIQUES ;

PAR M. MATHIEU WEILL.

THÉORÈME. — *Le produit de deux formes*

$$a^2 + b^2 + c^2 - ab - ac - bc$$

peut, d'une infinité de manières, être représenté par une forme de même espèce.

On a

$$a^2 + b^2 + c^2 - ac - bc - ab = \frac{1}{4}[(2a - b - c)^2 + 3(b - c)^2].$$

Posons

$$2a - b - c = A, \qquad 2a' - b' - c' = A',$$
$$b - c = B, \qquad b' - c' = B'.$$

On a, identiquement,

$$(A^2 + 3B^2)(A'^2 + 3B'^2) = (AA' + 3BB')^2 + 3(AB' - BA')^2$$

Posons

$$2\alpha - \beta - \gamma = AA' + 3BB',$$
$$\beta - \gamma = AB' - AB';$$

d'où

$$2\beta = 2\alpha - AA' - 3BB' + AB - BA'$$
$$= 2\alpha - 4aa' - 4bb' - 4cc' + 4ab' + 4bc' + 4ca',$$

$$2\gamma = 2\alpha - AA' - 3BB' - AB' + BA'$$
$$= 2\alpha - 4aa' - 4bb' - 4cc' + 4ac' + 4ba' + 4cb'.$$

D'autre part, on a

$$(a^2 + b^2 + c^2 - ab - ac - bc)(a'^2 + b'^2 + c'^2 - a'b' - a'c' - b'c')$$
$$= \frac{1}{16}(A^2 + 3B^2)(A'^2 + 3B'^2)$$
$$= \frac{1}{16}[(AA' + 3BB')^2 + 3(AB' - BA')^2]$$
$$= \frac{1}{4}[\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 - \alpha\beta - \alpha\gamma - \beta\gamma].$$

Posons $\frac{\alpha}{2} = K$,

$$aa' + bb' + cc' = \lambda,$$
$$ab' + bc' + ca' = \mu,$$
$$ac' + ba' + cb' = \nu,$$

$$L = K - \lambda + \mu,$$
$$M = K - \lambda + \nu,$$

il vient

$$(a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc)(a'^2+b'^2+c'^2-a'b'-a'c'-b'c')$$
$$\equiv K^2+L^2+M^2-KL-KM-LM,$$

où K est *arbitraire;* le théorème est donc établi.

En particulier, si l'on fait $K=0$, la forme se réduit à L^2+M^2-LM.

On peut généraliser beaucoup les résultats précédents.

Considérons, par exemple, l'expression

$$(a+b+c+d)^2+(a+b-c-d)^2$$
$$=2a^2+2b^2+2c^2+2d^2+4ab+4cd.$$

Le produit de deux formes analogues s'écrira

$$(u^2+v^2)(u'^2+v'^2)=(uu'+vv')^2+(uv'-vu')^2.$$

Posons

$$\alpha+\beta+\gamma+\delta=uu'+vv',$$
$$\alpha+\beta-\gamma-\delta=uv'-vu';$$

on tirera de là γ et δ en fonction des deux arbitraires α, β et des quantités connues a, b, ..., a', b', c', d'. Dès lors, le produit des deux formes

$$2a^2+2b^2+\ldots+4cd,$$
$$2a'^2+2b'^2+\ldots+4c'd'$$

pourra se mettre, d'une double infinité de manières, sous la forme

$$2\alpha^2+2\beta^2+\ldots+4\gamma\delta.$$

[O¹2b, e]

SUR LA DÉTERMINATION DE LA TANGENTE EN UN POINT DE CERTAINES COURBES PLANES;

Par M. R. BOUVAIST.

Il s'est glissé dans la première partie d'une étude sur ce sujet (*Nouvelles Annales*, 1914, p. 337-354), étude dont les circonstances m'avaient empêché de revoir les épreuves, quelques erreurs que je me propose de corriger.

Théorème. — *Soient $f + \lambda\varphi$ un faisceau linéaire de courbes planes algébriques, les courbes de base f et φ étant de degrés m et n, et Γ la courbe du faisceau passant par un point O du plan; la tangente à Γ en O passe par l'intersection des droites homothétiques par rapport à O, dans les rapports $\frac{1}{m}$ et $\frac{1}{n}$, des droites polaires de O par rapport à f et φ.*

Soient en effet

$$f = f_m + f_{m-1} + \ldots + Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0,$$

$$\varphi = \varphi_n + \varphi_{n-1} + \ldots + A'x^2 + 2B'xy + C'y^2 + 2D'x + 2E'y + F' = 0.$$

La tangente à Γ en O est

$$F'(Dx + Ey) - F(D'x + E'y) = 0;$$

les droites polaires de O par rapport à f et φ étant

$$2\mathrm{D}x + 2\mathrm{E}y + m\mathrm{F} = 0,$$
$$2\mathrm{D}'x + 2\mathrm{E}'y + n\mathrm{F}' = 0,$$

la proposition est démontrée.

On en déduit immédiatement les propositions suivantes :

1° *La tangente en un point quelconque d'une courbe du troisième ordre passe par l'intersection de la droite joignant les points d'intersection à distance finie de la courbe et des asymptotes avec l'homothétique dans le rapport $\frac{1}{3}$ de la droite polaire du point considéré par rapport aux asymptotes.*

2° *La tangente en un point d'une courbe du quatrième ordre passe par l'intersection de la polaire du point considéré par rapport à la conique passant par les point d'intersection à distance finie de la courbe avec ses asymptotes, avec l'homothétique dans le rapport $\frac{1}{2}$ par rapport au point considéré, de la polaire de ce point par rapport aux asymptotes.*

Exemples :

a. Soit Γ *une cubique admettant une asymptote de rebroussement* Δ *et une asymptote simple rencontrant la courbe en* A; *soient* M *un point de la courbe,* O *le point d'intersection de* D *et* Δ; *la parallèle à* D *menée par* M *coupe* Δ *en* M_1; *prenons* $\overline{\mathrm{MM}'_1} = \frac{3\,\mathrm{MM}_1}{2}$, *la parallèle à* OM'_1 *menée par le milieu* μ *de* MM_1 *rencontre la parallèle à* Δ *menée par* A *en* T, TM *est la tangente à* Γ *en* M.

β. *Soit* Γ *une cubique circulaire de foyer singulier* F, *admettant la droite* D *pour asymptote, soit* M *un point de la courbe, soit enfin* Δ *la perpendiculaire menée à* MF *en* F, *la parallèle à* Δ *menée par* M *coupe* D *en* M_1, *la parallèle à* D *menée par* M *coupe* Δ *en* M_2, μ *étant le milieu de* MM_2, *la droite* μM_1 *rencontre la tangente à* Γ *en* F *en* T, MT *est la tangente à* Γ *en* M.

γ. *Soit* Γ *une quartique bicirculaire à asymptotes d'inflexion; soient* M *un point de cette courbe*, F *et* F' *ses foyers singuliers; la tangente en* M *à* Γ *est parallèle à la polaire de* M *par rapport aux perpendiculaires en* F *et* F' *à* MF *et* MF'.

CORRESPONDANCE.

M. **G. Fontené**. — *Sur deux propositions de Laguerre.* — I. *Le cercle pédal d'un point fixe par rapport aux triangles inscrits à une conique et circonscrits à une autre a pour enveloppe une anallagmatique du quatrième ordre.*

Laguerre a énoncé ce théorème (*N. A.*, 1879, p. 205) sans en donner la démonstration.

II. *On considère une ellipse; soient u et v les distances des foyers de l'ellipse au centre du cercle, de sorte que les puissances de ces foyers par rapport au cercle sont* $P = u^2 - R^2$, $P' = v^2 - R^2$. *Les conditions de fermeture pour un triangle ou un quadri-*

latère circonscrit à l'ellipse et inscrit au cercle sont respectivement

$$PP' = 4b^2R^2,$$

$$\frac{b^2R^2}{PP'} + \frac{a^2}{P + P'} = \frac{1}{4}.$$

Cas où l'ellipse est remplacée par un cercle.

Les démonstrations de Laguerre (*N. A.*, 1879, p. 246 et 252) sont très indirectes; il donne la seconde relation entre u et v sous une forme moins simple, sans introduire P et P'.

M. G. **Fontené**. — *Au sujet de la question* 711. — De cette question posée par Faure (1864, p. 443), les deux premières parties ont été résolues (1865, p. 78, et 1868, p. 443). En ce qui concerne la troisième partie, non résolue, Faure signale une correction (1881, p. 143); on doit lire : puissance changée de signe. Il ajoute que le théorème figure dans son Recueil de théorèmes relatifs aux sections coniques. La quatrième partie est manifestement fausse; l'auteur dit qu'une équation de la forme

$$x^m f(a) + x^{m-1} f(a+1) + x^{m-2} f(a+2) + \ldots = 0,$$

où f désigne une fonction algébrique, a toujours des racines imaginaires. Indépendamment du cas $m = 1$, il s'ensuivrait, pour $m = 2$, que l'équation

$$ax^2 + (a+1)x + (a+2) = 0$$

a toujours ses racines imaginaires, c'est-à-dire que l'on a toujours

$$(a+1)^2 - 4a(a+2) < 0,$$

ou

$$3a^2 + 6a - 1 > 0;$$

or ce trinome a des racines et peut être négatif.

M. E.-N. Barisien. — *Au sujet du problème de Pappus généralisé.* — M. J. Joffroy a résolu très heureusement ce problème dans le cas d'un point P de la bissectrice d'un angle ω (1916, p. 168-171).

Je me permets d'ajouter deux remarques qui paraissent avoir leur intérêt. Je conserve les notations de M. Joffroy :

1° Si $l > 4a \sin \frac{\omega}{2}$, on aura quatre solutions réelles :

Si $l = 4a \sin \frac{\omega}{2}$, alors SS′ est perpendiculaire à OP, et le problème comporte trois solutions réelles (l'une étant double).

Si $l < 4a \sin \frac{\omega}{2}$, le problème n'a plus que deux solutions réelles.

2° On peut aussi traiter le problème en prenant pour inconnues $PS = X$, $PS' = Y$ (*voir* la figure, *loc. cit.*).

On a tout d'abord

$$X + Y = l. \tag{A}$$

Le triangle PAS donne

$$X^2 = a^2 + \overline{AS}^2 - 2a\,AS\cos\omega.$$

Or, les triangles semblables PAS et PA′S′ donnent

$$\frac{AS}{a} = \frac{X}{Y}, \qquad AS = \frac{aX}{Y}.$$

Par conséquent

$$X^2 = a^2 + \frac{a^2X^2}{Y^2} - 2a^2\frac{X}{Y}\cos\omega,$$

ou

$$X^2Y^2 = a^2(X^2 + Y^2) - 2a^2XY\cos\omega. \tag{B}$$

En remarquant que

$$X^2 + Y^2 = (X + Y)^2 - 2XY = l^2 - 2XY,$$

on a l'équation en XY

$$X^2 Y^2 = a^2(l^2 - 2XY) - 2a^2 XY \cos\omega,$$

ou

$$(C) \qquad X^2 Y^2 + 2a^2(1 + \cos\omega) XY - a^2 l^2 = 0.$$

Il en résulte

$$(D) \qquad XY = -a^2(1 + \cos\omega) \pm a\sqrt{a^2(1 + \cos\omega)^2 + l^2}.$$

On est donc ramené à résoudre et à construire X et Y connaissant X + Y et XY par (A) et (D).

La liaison entre cette solution et celle de M. Joffroy se fait par les relations suivantes :

$$OS = x = a + AS = a + \frac{aX}{Y}, \qquad OS' = y = a + A'S' = a + \frac{aY}{X};$$

$$x = a\,\frac{(X + Y)}{Y} = \frac{al}{Y}, \qquad y = a\,\frac{(X + Y)}{X} = \frac{al}{X};$$

$$xy = \frac{a^2 l^2}{XY}, \qquad x + y = \frac{al^2}{XY};$$

$$XY = \frac{a^2 l^2}{xy}, \qquad XY = \frac{al^2}{x + y}.$$

L'expression (D) peut encore s'écrire

$$XY = -2a^2 \cos\frac{2\omega}{2} \pm a\sqrt{4a^2 \cos\frac{4\omega}{2} + l^2}.$$

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES.

261.

(1852, p. 368.)

Trouver l'équation de la courbe, laquelle coupe sous un angle constant toutes les lignes géodésiques sur une surface développable, issues d'un point fixe sur la surface.

STREBOR.

SOLUTION
Par M. R.-B.

Quand on développe la surface considérée, les géodésiques deviennent des lignes droites. Les trajectoires obliques d'un faisceau de droites sont, comme on sait, des spirales logarithmiques. Donc les courbes demandées sont celles qui, après développement de la développable, deviennent des spirales logarithmiques.

Quant à leur équation, elle sera en général fort compliquée.

Autre réponse, analogue, de M. H. BROCARD.

512.

(1860, p. 44.)

Lorsqu'un corps peut tourner autour de six axes indépendants, on peut le faire tourner autour d'un axe quelconque.

MÖBIUS.

SOLUTION
Par M. R.-B.

L'énoncé est bien vague. On peut le préciser comme il suit : supposons un corps indéformable, soumis à des liaisons telles qu'à partir d'une de ses positions on puisse, tout en respectant ces liaisons, lui donner six rotations *infiniment petites* dont les axes n'aient pas entre eux de relations géométriques particulières. Alors, en donnant aux rapports mutuels des angles de ces rotations toutes les valeurs possibles, elles définiront,

par leurs compositions, tous les mouvements infiniment petits possibles à partir de la position considérée, et, en particulier, toutes les rotations infiniment petites.

Il s'agit là d'un fait banal.

513.

(1860, p. 44.)

Lorsqu'on donne un nombre de droites plus grand que six, il est toujours possible de trouver des forces qui, agissant suivant ces droites, se fassent équilibre : lorsque le nombre des droites est moindre, cette possibilité exige encore certaines conditions. MÖBIUS.

SOLUTION

Par M. R.-B.

La proportion est aujourd'hui banale, et il est même surprenant qu'elle ne fût pas telle en 1860. Sept droites prises au hasard sont les lignes d'action de forces en équilibre (déterminées à un facteur constant près). Si le nombre des droites se réduit à 6, 5 ou 4, il faut, pour qu'elles supportent des forces en équilibre, qu'elles appartiennent respectivement à un complexe linéaire, à une congruence linéaire, à une demi-quadrique. S'il y a trois droites, elles doivent former un faisceau. S'il y en a deux, elles doivent être confondues.

1981.

(1903, p. 432.)

Toutes les coniques réelles qui passent par le point double d'un limaçon de Pascal et lui sont tritangentes sont des ellipses égales entre elles. R. BRICARD.

SOLUTION

Par M. E. FABRY.

En posant

$$\tang\frac{\omega}{2} = t,$$

le limaçon de Pascal est représenté par les équations

$$x = (a + b\cos\omega)\cos\omega = \frac{a + b + (a - b)t^2}{(1 + t^2)^2}(1 - t^2),$$

$$y = (a + b\cos\omega)\sin\omega = \frac{a + b + (a - b)t^2}{(1 + t^2)^2}\,2t.$$

Une conique passant par l'origine (point double à tangentes imaginaires) a pour équation

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey = 0;$$

elle coupe le limaçon en six autres points donnés par l'équation

$$[a + b + (a - b)t^2][A(1 - t^2)^2 + 4Bt(1 - t^2) + 4Ct^2] + 2(1 + t^2)^2[D(1 - t^2) + 2Et] = 0.$$

La conique sera tritangente au limaçon si cette équation a trois racines doubles; son premier membre sera alors de la forme

$$(\alpha t^3 + \beta t^2 + \gamma t + \delta)^2,$$

ce qui donne les sept relations

$$\begin{aligned}
A(a - b) - 2D &= \alpha^2,\\
2B(b - a) + 2E &= \alpha\beta,\\
A(3b - a) + 4C(a - b) - 2D &= \beta^2 + 2\alpha\gamma,\\
-4Bb + 4E &= \alpha\delta + \beta\gamma,\\
-A(3b + a) + 4C(a + b) + 2D &= \gamma^2 + 2\beta\delta,\\
2B(a + b) + 2E &= \gamma\delta,\\
A(a + b) + 2D &= \delta^2.
\end{aligned}$$

Les deux premières, les deux dernières, et la somme de la troisième et de la cinquième, résolues par rapport à A, B, C, D, E, donnent

$$\begin{aligned}
2Aa &= \alpha^2 + \delta^2,\\
4Da &= (a - b)\delta^2 - (a + b)\alpha^2,\\
4Ba &= \gamma\delta - \alpha\beta,\\
4Ea &= (a + b)\alpha\beta + (a - b)\gamma\delta,\\
8Ca &= (\alpha + \gamma)^2 + (\beta + \delta)^2.
\end{aligned}$$

Il reste deux relations qui, par l'élimination de A, B, C, D, E, donnent

$$a(\alpha-\gamma)(\delta-\beta)=2b(\alpha\beta-\gamma\delta),$$

$$a[(\delta-\beta)^2-(\alpha-\gamma)^2]$$
$$=b[2\alpha^2+2\delta^2-2\beta^2-2\gamma^2+(\alpha-\gamma)^2+(\beta-\delta)^2].$$

Posons

$$\gamma=\alpha+u, \qquad \beta=\delta-v,$$

ce qui donne

$$auv=2b(\alpha v+\delta u),$$
$$a(v^2-u^2)+b(v^2+u^2)=4b(\delta v-\alpha u).$$

On peut ainsi exprimer α, β, γ, δ en fonction de u et v

$$4b\alpha=(a-b)u, \qquad 4b\gamma=(a+3b)u,$$
$$4b\delta=(a+b)v, \qquad 4b\beta=(a-3b)v,$$

et les coefficients de l'équation de la conique deviennent

$$64\,\mathrm{A}\,ab^2=2(a-b)^2u^2+2(a+b)^2v^2,$$
$$64\,\mathrm{B}\,ab^2=8abuv,$$
$$64\,\mathrm{C}\,ab^2=2(a+b)^2u^2+2(a-b)^2v^2,$$
$$64\,\mathrm{D}\,ab^2=(a^2-b^2)[(a+b)v^2-(a-b)u^2],$$
$$64\,\mathrm{E}\,ab^2=2(a^2-b^2)auv.$$

L'équation qui détermine les longueurs des demi-axes (R) de la conique est

$$\mathrm{R}^4-\mathrm{R}^2(\mathrm{A}+\mathrm{C})\frac{\mathrm{AE}^2+\mathrm{CD}^2-2\mathrm{BDE}}{(\mathrm{B}^2-\mathrm{AC})^2}$$
$$-\frac{(\mathrm{AE}^2+\mathrm{CD}^2-2\mathrm{BDE})^2}{(\mathrm{B}^2-\mathrm{AC})^3}=0.$$

Or on a

$$\mathrm{A}+\mathrm{C}=\frac{a^2+b^2}{16ab^2}(u^2+v^2),$$

$$\mathrm{B}^2-\mathrm{AC}=-\left(\frac{a^2-b^2}{32ab^2}\right)^2(u^2+v^2)^2,$$

$$\mathrm{AE}^2+\mathrm{CD}^2-2\mathrm{BDE}=\left(\frac{a^2-b^2}{16}\right)^4\frac{(u^2+v^2)^3}{2a^3b^6},$$

$$\mathrm{R}^4-\mathrm{R}^2\frac{a^2+b^2}{2}+\left(\frac{a^2-b^2}{4}\right)^2=0.$$

Les carrés des demi-axes ont les valeurs positives constantes

$$\left(\frac{a+b}{2}\right)^2, \quad \left(\frac{a-b}{2}\right)^2;$$

ces coniques sont des ellipses de grandeur constante, dont le centre peut être réel ou imaginaire.

1992 *bis*.

(1904, p. 144.)

On donne dans l'espace une courbe C. Définir la surface la plus générale dont C est la ligne de striction en même temps qu'une ligne asymptotique.

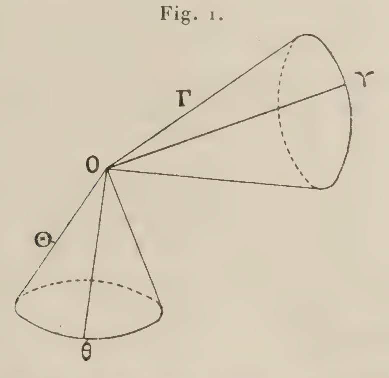
R. Bricard.

Solution

Par l'auteur.

Soient M un point quelconque de C (*fig.* 1) MT, la tan-

Fig. 1.



gente en ce point, MG la génératrice, passant en M, d'une surface satisfaisante S. Par un point O fixe menons $O\theta$ parallèle à MT et $O\gamma$ parallèle à MG. Quand M varie sur C, $O\theta$ engendre le cône directeur Θ de la courbe C, et $O\gamma$ engendre le cône directeur Γ de la surface S.

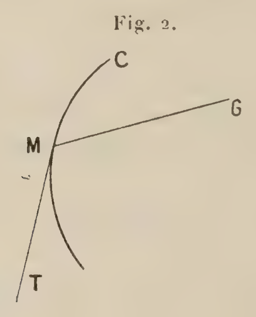
Cela posé, interprétons sur les cônes Θ et Γ les conditions de l'énoncé :

1° C étant la ligne de striction de S, M doit être le point central sur la génératrice G; autrement dit, le plan tangent

à S en M, c'est-à-dire le plan MGT, est perpendiculaire au plan tangent dont le point de contact est rejeté à l'infini sur MG. Or ce dernier plan tangent est, comme on sait, parallèle au plan tangent à Γ suivant $O\gamma$, et le plan MGT est parallèle au plan $O\gamma\theta$. On voit donc que le plan $O\gamma\theta$ doit être le plan normal à Γ suivant $O\gamma$.

2° C étant une ligne asymptotique de S, le plan osculateur

Fig. 2.



à C en M doit être tangent à S; autrement dit, le plan osculateur doit être MGT. Or le plan osculateur dont il s'agit est parallèle au plan tangent au cône Θ suivant $O\theta$. On voit donc que le plan $O\gamma\theta$ doit être le plan tangent au cône Θ suivant $O\theta$.

La solution de la question posée résulte immédiatement de ces considérations : la courbe C étant donnée, le cône Θ l'est également. Le cône Γ doit être tel que tous ses plans normaux soient tangents à Θ. Sa détermination revient au problème des développantes sur la sphère. Elle dépend, comme on sait, d'une quadrature, et introduit un paramètre arbitraire.

Le cône Γ étant construit, la surface S doit être considérée comme connue.

2014.

(1905, p. 192.)

Les axes des quadriques de révolution par rapport auxquelles deux droites données sont conjuguées engendrent un complexe linéaire.

R. Bricard.

SOLUTION

Par L'AUTEUR.

Remarquons tout d'abord que la conjuguée, par rapport à une quadrique de révolution, d'une droite qui en rencontre l'axe à angle droit, est une droite qui jouit de ces mêmes propriétés, et qui, de plus, est rectangulaire à la première.

Cela est évident, si l'on considère la seconde droite comme intersection des plans tangents à la quadrique aux points où la première droite la rencontre.

Soient alors D et D' les deux droites données, X l'axe d'une quadrique de révolution (Q) satisfaisante. Je dis que l'hyperboloïde (H) défini par D, D' et X est *équilatère*.

Il existe en effet, comme on sait, deux génératrices de (H), de système opposé à celui de D, D', X, et rencontrant X à angle droit. Soient G et G' ces deux génératrices. Cherchons la conjuguée de G par rapport à (Q). Ce sera, d'après la remarque initiale, une droite rencontrant X à angle droit. En outre, G rencontrant D et D', sa conjuguée doit rencontrer D et D'.

En définitive, cette conjuguée n'est autre que G'. Il résulte encore de la remarque initiale que G' est rectangulaire à G.

Ainsi, les deux génératrices de (H) qui rencontrent X à angle droit sont rectangulaires entre elles. Cela entraîne bien la propriété de (H), énoncée plus haut.

On est donc ramené à établir que *les droites* X, *qui déterminent avec deux droites données* D *et* D' *un hyperboloïde équilatère, engendrent un complexe linéaire.*

Voici la démonstration de cette propriété :

Considérons les hyperboloïdes équilatères (H) contenant D et D' et passant par un point donné A. Ces hyperboloïdes sont assujettis à huit conditions, toutes linéaires par rapport aux coefficients de leur équation ponctuelle. Ils forment donc un faisceau. La base de ce faisceau comprend les droites D, D', la droite menée par A et s'appuyant sur D et D', et doit, par conséquent, être complétée par une autre droite G.

On voit donc que toutes les droites X, déterminant avec D et D' un hyperboloïde équilatère et passant par un point donné A, ont pour lieu un plan (A, G). Cela suffit à établir la proposition.

2078.

(1907, p. 335.)

On appelle u_n *le* $n^{ième}$ *coefficient du développement de* $\dfrac{1}{1-3x-3x^2-x^3}$ *et* v_n *le* $n^{ième}$ *coefficient du développement de* $\dfrac{1}{1+3x+3x^2-x^3}$; *démontrer qu'en prenant*

$$X = u_{n+1}, \qquad Z = v_n,$$
$$Y = u_n + u_{n+1}, \qquad T = v_n + v_{n+1},$$

on a

$$2(X^3 + Z^3) = Y^3 + T^3.$$

R. Amsler.

SOLUTION

Par M. L. Chanzy.

Posons en général

$$f(x) = hx^3 + px^2 + qx + r,$$

l'équation $f(x) = 0$ ayant trois racines distinctes. Soient

$$-\frac{1}{f(x)} = \sum_n u_n x^n, \qquad + \frac{1}{x^3 f\left(\frac{1}{x}\right)} = \sum_n v_n x^n,$$

et nous aurons l'identité

(1) $$\left(\frac{r}{h}\right)^{2n+4} u_{n+1}^3 f\left(\frac{u_n}{u_{n+1}}\right) + v_n^3 f\left(\frac{v_{n+1}}{v_n}\right) = 0.$$

Or, dans la question proposée, on peut écrire, suivant une remarque de M. A. Gérardin,

$$f(x) = (x+1)^3 - 2, \qquad \frac{r}{h} = -1.$$

On aura donc, en appliquant l'identité (1),

$$(u_n + u_{n+1})^3 - 2u_{n+1}^3 + (v_n + v_{n+1})^3 - 2v_n^3 = 0,$$

ce qui est bien la relation proposée par M. R. Amsler.

Démonstration de l'identité (1). — Soient a, b, c les

racines *supposées distinctes* de $f(x) = 0$. On a

$$
\begin{aligned}
-\frac{1}{f(x)} &= \frac{-1}{h(x-a)(x-b)(x-c)} \\
&= \frac{1}{h(a-b)(b-c)(c-a)} \\
&\quad \times \left(\frac{b-c}{x-a} + \frac{c-a}{x-b} + \frac{a-b}{x-c}\right) \\
&= \frac{1}{h(a-b)(b-c)(c-a)} \\
&\quad \times \left[\quad \frac{c-b}{a}\left(1 + \frac{x}{a} + \frac{x^2}{a^2} + \ldots\right) \right. \\
&\qquad + \frac{a-c}{b}\left(1 + \frac{x}{b} + \frac{x^2}{b^2} + \ldots\right) \\
&\qquad \left. + \frac{b-a}{c}\left(1 + \frac{x}{c} + \frac{x^2}{c^2} + \ldots\right)\right].
\end{aligned}
$$

Donc

$$
u_n = \frac{1}{h(a-b)(b-c)(c-a)}\left(\frac{c-b}{a^{n+1}} + \frac{a-c}{b^{n+1}} + \frac{b-a}{c^{n+1}}\right).
$$

On a de même

$$
\begin{aligned}
+\frac{1}{x^3 f\left(\frac{1}{x}\right)} &= \frac{1}{h(1-ax)(1-bx)(1-cx)} \\
&= \frac{-1}{h(a-b)(b-c)(c-a)} \\
&\quad \times \left[\frac{(b-c)a^2}{1-ax} + \frac{(c-a)b^2}{1-bx} + \frac{(a-b)c^2}{1-cx}\right] \\
&= \frac{-1}{h(a-b)(b-c)(c-a)} \\
&\quad \times [\quad (b-c)a^2(1 + ax + a^2x^2 + \ldots) \\
&\qquad + (c-a)b^2(1 + bx + b^2x^2 + \ldots) \\
&\qquad + (a-b)c^2(1 + cx + c^2x^2 + \ldots)].
\end{aligned}
$$

Donc

$$
\begin{aligned}
v_n = {}& \frac{-1}{h(a-b)(b-c)(c-a)} \\
&\times [(b-c)a^{n+2} + (c-a)b^{n+2} + (a-b)c^{n+2}].
\end{aligned}
$$

On tire de là

$$u_n - au_{n+1} = \frac{1}{h(a-b)(b-c)(c-a)}$$
$$\times\left(\frac{a-c}{b^{n+1}} + \frac{b-a}{c^{n+1}} - a\frac{a-c}{b^{n+2}} - a\frac{b-a}{c^{n+2}}\right)$$
$$= \frac{1}{h(b-c)} \cdot \frac{c^{n+2}-b^{n+2}}{(bc)^{n+2}};$$

$$v_{n+1} - av_n = \frac{-1}{h(b-c)}(c^{n+2}-b^{n+2}).$$

Donc

$$u_n - au_{n+1} = -\frac{v_{n+1}-av_n}{(bc)^{n+2}}.$$

De même,

$$u_n - bu_{n+1} = -\frac{v_{n+1}-bv_n}{(ca)^{n+2}},$$

$$u_n - cu_{n+1} = -\frac{v_{n+1}-cv_n}{(ab)^{n+2}}.$$

Multipliant membre à membre,

$$u_{n+1}^3 f\left(\frac{u_n}{u_{n+1}}\right) = -\frac{v_n^3 f\left(\frac{v_{n+1}}{v_n}\right)}{(abc)^{2n+4}},$$

et comme

$$abc = -\frac{r}{h},$$

c'est bien l'identité annoncée (1).

Applications. — Outre la solution générale de

$$2(x^3+z^3) = y^3+t^3$$

indiquée par M. R. Amsler, on peut tirer de (1) des solutions d'équations indéterminées analogues, du troisième degré, symétriques par rapport à deux couples d'inconnues, en particularisant le polynome $f(x)$.

Soit, par exemple,

$$f(x) = (x+1)^3 - k.$$

Nous aurons

$$(k-1)^{2n+4}[(u_n+u_{n+1})^3 - ku_{n+1}^3] + (v_{n+1}+v_n)^3 - kv_n^3 = 0,$$

et, pour $n = 3h + 1$, cela donnera des solutions de

$$X^3 + Y^3 = k(Z^3 + T^3).$$

Soit, par exemple, $n = 1$,

$$u_1 = \frac{3}{(1-k)^2}, \qquad u_2 = \frac{-3(k+2)}{(1-k)^3}, \qquad v_1 = 3, \qquad v_2 = 6.$$

On a, en supprimant les facteurs communs,

$$(1+2k)^3 + (k-1)^3 = k[(k+2)^3 - (k-1)^3].$$

Pour $k = \lambda^3$, on a un cube somme de trois cubes

$$(\lambda^4 + 2\lambda)^3 = (2\lambda^3 + 1)^3 + (\lambda^3 - 1)^3 + (\lambda^4 - \lambda)^3,$$

formule équivalente à une formule d'Euler (Cf. *S. Œ.*, 1906, p. 93).

En partant de

$$f(x) = (x + l)^3 - k,$$

on a plus simplement

$$(l^3 + m^3)[(3l^2)^3 + (m^2)^3] = (3l^3 + m^3)^3 - (2lm^2)^3,$$

d'où un cube somme de cinq cubes.

Remarques. — 1° La démonstration précédente suppose que le polynome $f(x)$ a ses trois racines distinctes. Un calcul analogue démontre que les conclusions subsistent dans le cas où il a une racine multiple, ce que des considérations de continuité permettaient de prévoir.

2° Si $f = x^2 + px + q$, on trouve par un raisonnement semblable que

$$q^{2n+3} u_{n+1}^2 f\left(\frac{u_n}{u_{n+1}}\right) = v_n^2 f\left(\frac{v_{n+1}}{v_n}\right),$$

en posant

$$\frac{1}{x^2 + px + q} = \Sigma u_n x^n \qquad \text{et} \qquad \frac{1}{qx^2 + px + 1} = \Sigma v_n x^n.$$

Additions et remarques

Par M. A. Gérardin.

Je vais indiquer plusieurs *identités* donnant de nouvelles

solutions dès qu'on en possède une

$$2(a^3+b^3)=c^3+d^3$$

sans donner ici de détails sur les *méthodes*.

On aura donc pour

$$2(X^3+Z^3)=Y^3+T^3,$$

$$X=2a(a^3-c^3),\qquad Y=b(2a^3+c^3),$$
$$Z=c(c^3-4a^3),\qquad T=d(2a^3+c^3).$$

On aura encore

$$X=2a(a^3-d^3),\qquad Y=b(2a^3+d^3),$$
$$Z=c(2a^3+d^3),\qquad T=d(d^3-4a^3)$$

ainsi que

$$X=a(c^3+2b^3),\qquad Y=2b(b^3-c^3),$$
$$Z=c(c^3-4b^3),\qquad T=d(c^3+4b^3)$$

et enfin

$$X=a(d^3+2b^3),\qquad Y=2b(b^3-d^3),$$
$$Z=c(d^3+2b^3),\qquad T=d(d^3-4b^3).$$

J'ajouterai aussi des solutions générales du problème

$$(m^3+3n^3)^3+(m^3-3n^3)^3=2[(m^3)^3+(3mn^2)^3].$$

De même

$$(9u^3+s^3)^3+(9u^3-s^3)^3=2[(9u^3)^3+(3us^2)^3],$$

et si l'on admet les solutions négatives

$$(f^2+fg-g^2)^3+(f^2-fg-g^2)^3=2[(f^2)^3-(g^2)^3].$$

Enfin, on peut trouver, par ma *méthode universelle*, d'autres identités en utilisant des fonctions de deux variables au second degré.

Note. — Quelques solutions numériques pour finir :

$$1\quad 3\quad 12\quad 46\quad \ldots\quad u_{n+1}=3u_n+3u_{n-1}+u_{n-2},$$
$$1\quad -3\quad 6\quad -8\quad \ldots\quad v_{n+1}=-3v_n-3v_{n-1}+v_{n-2};$$

$X = u_{n+1}$	$=$ 3	12	46	...,
$Z = v_n$	$=$ 1	-3	6	...,
$Y = u_n + u_{n+1} =$	4	15	58	...,
$T = v_n + v_{n+1} =$	-2	3	-8	...,

comme on pourra le vérifier.

ANCIENNES QUESTIONS NON RÉSOLUES.

383 (**1857**, 182). — Soient donnés dans un même plan : 1° une courbe algébrique par une équation de degré n; 2° un triangle dont les côtés sont représentés par les trois équations linéaires

$$p = 0, \qquad q = 0, \qquad r = 0;$$

d'un point quelconque M, pris sur la courbe, abaissons sur les côtés du triangle p, q, r respectivement les perpendiculaires P, Q, R; construisons une seconde courbe dont les points aient pour coordonnées $\frac{P}{R}$, $\frac{Q}{R}$; démontrer : 1° que la seconde courbe est aussi de degré n; 2° que l'équation de l'enveloppe de la droite qui joint deux points correspondants M, m des deux courbes est de degré $2n$.

400 (**1857**, 391). — Soit u une fonction *rationnelle* et *entière* du degré n d'un nombre *quelconque* de variables x, y, z, ..., et soient du, d^2u, ..., d^nu les différentielles successives qu'on obtient, mais en supposant que dx, dy, dz, ... sont *constantes* (¹). Formons l'équation

$$\begin{aligned} t^n d^n u &+ u t^{n-1} d^{n-1} u + n(n-1) t^{n-2} d^{n-2} u \\ &+ n(n-1)(n-2) t^{n-3} d^{n-3} u + \ldots \\ &+ n(n-1)(n-2)\ldots 2 t\, du \\ &+ n(n-1)(n-2)\ldots 2.1\, u = 0. \end{aligned}$$

(¹) Alors du renferme dx, dy, dz; d^2u renferme dx^2, $dx\,dy$, dy^2, ... et $d^{n+1} = 0$.

Formons une fonction symétrique *quelconque* rationnelle et entière des *différences* des racines de cette équation; sa valeur est une fonction entière des coefficients $d^n u$, $d^{n-1} u$, $d^{n-2} u$, ..., du, u et, par conséquent, une fonction de x, y, z, ..., dx, dy, dz; si l'on différencie cette dernière fonction en traitant dx, dy, dz, ... comme des constantes, on trouve un résultat *identiquement* nul. MICHAEL ROBERTS.

NOTE DU RÉDACTEUR.

Exemple. — Soit

$$n = 2, \qquad u = ax^2 + by^2 + cz^2,$$
$$du = 2(ax\,dx + by\,dy + cz\,dz),$$
$$d^2 u = 2(a\,dx^2 + b\,dy^2 + c\,dz^2);$$

l'équation en t est $t^2 d^2 u + 2t\,du + 2u = 0$. Choisissons comme fonction symétrique la somme des carrés des différences des racines; cette somme est

$$4(du^2 + 2u\,d^2 u) = -16[ab(x\,dy - y\,dx)^2 + ac(x\,dz - z\,dx)^2 + bc(y\,dz - z\,dy)^2];$$

différentiant cette valeur en regardant dx, dy, dz comme constantes, le résultat est identiquement nul.

ERRATA.

Page 151, dernière ligne, *au lieu de* $\lambda - 2ab$, *lire* $\lambda(-2ab)$.
Page 169, ligne 13, *au lieu de* $x + y + A$, *lire* $x + y = A$.
Page 170, ligne 9 en remontant, *au lieu de* M, *lire* l.
Page 171, ligne 2, *au lieu de* $a \sin B$, *lire* $a \sin \omega$.
Page 201, lignes 12-13 en remontant, *au lieu de* du présent Volume, *lire* du Volume de 1915.

[K'2e]

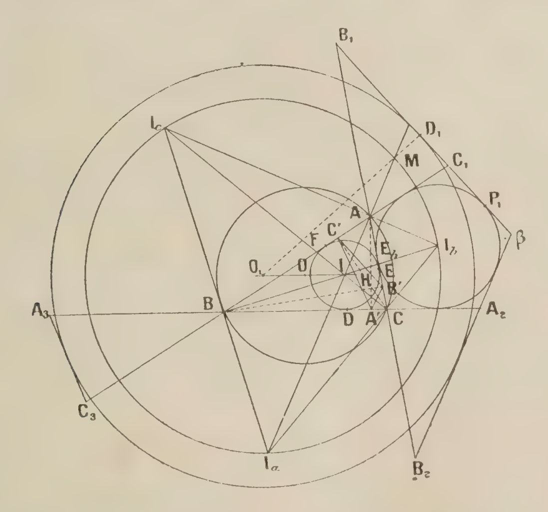
SUR UNE CURIEUSE FIGURE RELATIVE AU TRIANGLE;

PAR M. V. THÉBAULT,
Professeur à Ernée (Mayenne).

Dans ce qui va suivre nous considérerons un triangle ABC dont les côtés sont

$$BC = a, \qquad CA = b, \qquad AB = c;$$

les hauteurs AA', BB', CC'; O, I, I_a, I_b, I_c les centres des cercles circonscrit, inscrit et exinscrits de rayons



respectifs R, r, r_a, r_b, r_c; D, E, F, D_a, E_a, F_a, D_b, E_b, F_b, D_c, E_c, F_c les contacts de ces cercles avec BC, CA, AB respectivement; H l'orthocentre (*voir* la figure).

1. Sur les prolongements des côtés du triangle ABC, marquons, *extérieurement* au triangle, les segments

$$AB_1 = BA, \quad AC_1 = CA, \quad CB_2 = BC,$$
$$CA_2 = AC, \quad BC_3 = CB, \quad BA_3 = AB.$$

Nous obtenons ainsi un hexagone $B_1C_1A_2B_2C_3A_3$ qui nous paraît intéressant.

Les triangles B_1AC_1, A_2CB_2, A_3BC_3 sont respectivement *symétriques* du triangle ABC par rapport aux bissectrices extérieures des angles de ce dernier triangle. Les droites B_1C_1, A_2B_2, A_3C_3, antiparallèles des côtés BC, AB, CA par rapport aux angles A, C, B respectivement sont donc les secondes tangentes communes extérieures aux cercles exinscrits I_b et I_c, I_b et I_a, I_a et I_c. D'où cette première propriété :

Les côtés d'un triangle ABC *prolongés découpent respectivement sur les tangentes communes extérieures aux cercles exinscrits au triangle des segments égaux aux côtés de ce triangle.*

Considérons le triangle AB_1C_1 par exemple. La bissectrice intérieure IA de ABC contient aussi le centre M du cercle inscrit à AB_1C_1. Comme $AM = IA$ et que le point I est l'orthocentre du triangle $I_aI_bI_c$, M est un point du cercle O_1 circonscrit à $I_aI_bI_c$, cercle homothétique du cercle O circonscrit à ABC, le centre d'homothétie étant I et le rapport

$$\frac{IA}{IM} = \frac{1}{2}.$$

Soit alors D_1 le contact du cercle inscrit M avec B_1C_1; D_1I_1 passe en O_1 et

$$O_1D_1 = O_1M + MD_1 = 2R + r.$$

De même

$$O_1E_1 = O_1F_1 = 2R + r = O_1D_1,$$

et l'on a ce résultat remarquable :

Le triangle $\alpha\beta\gamma$, *formé par les droites* B_1C_1, A_2B_2, C_3A_3, *c'est-à-dire par les tangentes communes extérieures aux cercles exinscrits* I_b *et* I_c, I_a *et* I_b, I_a *et* I_c *du triangle* ABC, *qui est directement homothétique au triangle orthique* $A'B'C'$, *est circonscrit à un cercle de centre* O_1 *et de rayon*

$$2R + r = \frac{r + r_a + r_b + r_c}{2}.$$

Les angles du triangle $\alpha\beta\gamma$, respectivement égaux à ceux du triangle orthique $A'B'C'$, sont

$$\pi - 2A, \quad \pi - 2B, \quad \pi - 2C.$$

Par suite les côtés $\beta\gamma$, $\gamma\alpha$, $\alpha\beta$ font respectivement avec BC, CA, AB trois angles

$$(C - B), \quad (C - A), \quad (A - B),$$

Le triangle $\beta B_1 B_2$, par exemple, est isoscèle et le milieu de la base B_1B_2 est le contact E_b du cercle exinscrit I_b avec CA, car

$$B_1E_b = c + p - c = p = \frac{B_1B_2}{2}.$$

βE_b est donc bissectrice intérieure du triangle $\alpha\beta\gamma$, de même que αD_a et γF_c et le centre du cercle inscrit au triangle $\alpha\beta\gamma$ est O_1.

Le triangle rectangle $\beta O_1 D_1$ donne immédiatement

$$\begin{aligned} O_1D_1 &= O_1 b \sin\left(\frac{\pi}{2} - B\right) \\ &= O_1\beta \cos B \\ &= \ O_1 I_b + I_b \beta) \cos B \\ &= 2R \cos B + r_b \\ &= 2R(1 - \cos B) + r_b - r + 2R + r = 2R + r. \end{aligned}$$

Nous avons ainsi une vérification trigonométrique de la propriété précédente.

Soient P_1 et Q_1 les contacts du côté $\beta\gamma$ avec les cercles I_b et I_c. Ces deux cercles étant aussi exinscrits au triangle AB_1C_1,

$$P_1C_1 = p - a, \qquad B_1Q_1 = p - a$$

et

$$P_1Q_1 = P_1C_1 + C_1B_1 + B_1Q_1 = b + c.$$

De même

$$P_2Q_2 = a + b, \qquad P_3Q_3 = a + c;$$

et :

Les segments compris entre les contacts des tangentes communes extérieures aux cercles I_b *et* I_c, I_c *et* I_a, I_a *et* I_b *sont respectivement égaux à la somme des deux côtés correspondants du triangle* ABC.

On en déduit que l'on peut toujours construire un triangle θ avec les droites P_1Q_1, P_2Q_2, P_3Q_3.

Par rapport aux éléments de ABC, ce triangle a pour périmètre

$$2(a + b + c) = 4p;$$

pour surface

$$S = \sqrt{2p\,abc} = \sqrt{abc(a + b + c)}.$$

Le cercle inscrit a pour rayon

$$\rho^2 = 2Rr = R^2 - \overline{OI}^2.$$

Ce rayon n'est autre que la perpendiculaire $O\omega$ à OI en I et limitée au cercle circonscrit O au triangle ABC. Le cercle inscrit à ce triangle θ détermine sur les côtés des segments égaux aux côtés a, b, c du triangle ABC.

Le rapport d'homothétie du triangle $\alpha\beta\gamma$ et du

triangle orthique $A'B'C'$ de ABC est

$$\frac{2R + r}{2R\cos A\cos B\cos C},$$

$2R\cos A\cos B\cos C$ étant en effet le rayon du cercle inscrit à $A'B'C'$ en fonction des éléments de ABC.

En désignant par a_1, b_1, c_1 les côtés de $\alpha\beta\gamma$, on a

$$a_1 = B'C'\frac{2R + r}{2R\cos A\cos B\cos C} = \frac{(2R + r)\sin A}{\cos B\cos C},$$

de même

$$b_1 = \frac{(2R + r)\sin B}{\cos A\cos C}, \qquad c_1 = \frac{(2R + r)\sin C}{\cos A\cos B}.$$

On tire de là le demi-périmètre p_1, la surface S_1 et le rayon R_1 du cercle circonscrit, de $\alpha\beta\gamma$:

$$p_1 = (2R + r)\ \operatorname{tang} A \operatorname{tang} B \operatorname{tang} C,$$

$$S_1 = (2R + r)^2 \operatorname{tang} A \operatorname{tang} B \operatorname{tang} C,$$

$$R_1 = \frac{2R + r}{4\cos A\cos B\cos C}.$$

Comme d'autre part a_1 peut s'écrire

$$a_1 = r_b \operatorname{tang} B + r_c \operatorname{tang} C + b + c,$$

ou

$$a_1 = r_1(\operatorname{tang} B + \operatorname{tang} C),$$

et que

$$r_b = 4R\cos\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2},$$

$$r_c = 4R\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2},$$

il résulte que

$$r_1 = R(1 + \cos A + \cos B + \cos C) = R\left(1 + \frac{R}{r}\right).$$

D'où une troisième façon d'obtenir ce rayon r_1 du cercle inscrit au triangle $\alpha\beta\gamma$ ([1]).

2. Les symétriques des points B_1 et C_1, A_2 et B_2, C_3 et A_3 par rapport aux sommets A, B, C déterminent aussi un triangle $\alpha'\beta'\gamma'$ dont les côtés sont respectivement antiparallèles de ceux du triangle ABC dans les angles A, B, C. Ces côtés de $\alpha'\beta'\gamma'$ sont les tangentes communes intérieures aux groupes de cercles I et I_a, I et I_b, I et I_c. Ces tangentes sont les symétriques des côtés BC, CA, AB par rapport aux bissectrices intérieures des angles du triangle ABC.

Par conséquent :

Les tangentes communes intérieures aux cercles I *et* I_a, I *et* I_b, I *et* I_c *forment un triangle* $\alpha'\beta'\gamma'$ *inversement homothétique aux triangles* $\alpha\beta\gamma$ *et* A′B′C′ *et découpent sur les côtés du triangle* ABC *des segments respectivement égaux aux côtés de ce triangle* ABC.

Le triangle $\alpha'\beta'\gamma'$ a pour cercle inscrit le cercle I

([1]) Ces formules ont été signalées déjà, dans *Mathesis* notamment, 1911, p. 208-209, par MM. Neuberg et Déprez à propos d'une communication de M. Hayashi, professeur au Collège des Sciences près de l'Université de Tokio : *Sur un théorème japonais.* Nous renvoyons à cet intéressant article les lecteurs que pourrait intéresser l'historique de la question que proposa dans *Mathesis*, en 1896, p. 192, M. Neuberg :

Soient O, I, I_a, I_b, I_c *les centres du cercle circonscrit et des cercles inscrits et exinscrits à un triangle* ABC, *et soient* R, r, r_a, r_b, r_c *les rayons de ces cercles. Les quatrièmes tangentes communes à deux des cercles* I_a, I_b, I_c *forment un triangle* $A_1B_1C_1$. *Démontrer que le cercle inscrit à* $A_1B_1C_1$ *a même centre que le cercle circonscrit au triangle* $I_aI_bI_c$ *et qu'il a pour rayon*

$$r_1 = 2R + r = \frac{r + r_a + r_b + r_c}{2}.$$

inscrit au triangle ABC. Ses angles sont encore

$$\pi - 2A, \quad \pi - 2B, \quad \pi - 2C,$$

et les côtés font respectivement avec BC, CA, AB les angles

$$(C - B), \quad (C - A), \quad (A - B).$$

Si P'_1 et Q'_1, P'_2 et Q'_2, P'_3 et Q'_3 désignent les contacts des côtés du triangle $\alpha'\beta'\gamma'$ avec I et I_b, I et I_a, I et I_c respectivement,

$$P'_1 Q'_1 = a - c, \qquad P'_2 Q'_2 = a - b, \qquad P'_3 Q'_3 = b - c$$

et :

Les segments compris entre les contacts des tangentes communes intérieures aux cercles I *et* I_a, I *et* I_b, I *et* I_c *sont respectivement égaux aux différences des deux côtés correspondants du triangle* ABC.

Le rapport d'homothétie des triangles $\alpha'\beta'\gamma'$ et $A'B'C'$ est

$$\frac{r}{2R\cos A \cos B \cos C}.$$

En désignant par a'_1, b'_1, c'_1 les côtés du triangle $\alpha'\beta'\gamma'$, on a

$$a'_1 = \frac{r \sin A}{\cos B \cos C}, \qquad b'_1 = \frac{r \sin B}{\cos A \cos C}, \qquad c'_1 = \frac{r \sin C}{\cos A \cos B}.$$

Il en résulte immédiatement le périmètre p'_1, la surface S'_1 et le rayon R'_1 du cercle circonscrit à $\alpha'\beta'\gamma'$:

$$p'_1 = r \operatorname{tang} A \operatorname{tang} B \operatorname{tang} C,$$
$$S'_1 = r^2 \operatorname{tang} A \operatorname{tang} B \operatorname{tang} C,$$
$$R'_1 = \frac{r}{4\cos A \cos B \cos C}.$$

En se reportant aux formules du précédent para-

graphe, on obtient par exemple

$$a_1 - a'_1 = \frac{2\,\mathrm{R}\sin\mathrm{A}}{\cos\mathrm{B}\cos\mathrm{C}},$$

d'où

$$\Sigma(a_1 - a'_1) = \mathrm{R}\left(\frac{\sin 2\mathrm{A} + \sin 2\mathrm{B} + \sin 2\mathrm{C}}{\cos\mathrm{A}\cos\mathrm{B}\cos\mathrm{C}}\right)$$
$$= 4\,\mathrm{R}\,\mathrm{tang}\,\mathrm{A}\,\mathrm{tang}\,\mathrm{B}\,\mathrm{tang}\,\mathrm{C},$$

$$\Sigma(a_1 + a'_1) = 4(\mathrm{R} + r)\,\mathrm{tang}\,\mathrm{A}\,\mathrm{tang}\,\mathrm{B}\,\mathrm{tang}\,\mathrm{C}$$
$$= 2\,\mathrm{tang}\,\mathrm{A}\,\mathrm{tang}\,\mathrm{B}\,\mathrm{tang}\,\mathrm{C}(a\cot\mathrm{A} + b\cot\mathrm{B} + c\cot\mathrm{C}).$$

3. Les triangles $\alpha\beta\gamma$ et $\alpha'\beta'\gamma'$ homothétiques à A'B'C' sont inversement homothétiques entre eux. Le centre d'homothétie L_1 est un point situé sur IO_1, entre I et O_1, et tel que

$$\frac{\mathrm{L}_1\mathrm{O}_1}{\mathrm{L}_1\mathrm{I}} = \frac{2\,\mathrm{R} + r}{r},$$

d'où

$$\frac{\mathrm{IO}_1}{\mathrm{L}_1\mathrm{I}} = \frac{2(\mathrm{R} + r)}{r} = \frac{2\,\mathrm{R} - r_a - r}{x_1 - r},$$

x_1 étant la distance de L_1 à BC.

On déduit

$$x_1 = \frac{r(r_b + r_c)}{2(\mathrm{R} + r)}, \qquad y_1 = \frac{r(r_a + r_c)}{2(\mathrm{R} + r)}, \qquad z_1 = \frac{r(r_a + r_b)}{2(\mathrm{R} + r)},$$

y_1 et z_1 étant les distances de L_1 à CA et AB.

Les coordonnées normales de L_1 par rapport au triangle ABC sont donc

$$r_a + r_b, \quad r_b + r_c, \quad r_a + r_c,$$

ou

$$\cos^2\frac{\mathrm{A}}{2}, \quad \cos^2\frac{\mathrm{B}}{2}, \quad \cos^2\frac{\mathrm{C}}{2},$$

ou encore

$$1 + \cos\mathrm{A}, \quad 1 + \cos\mathrm{B}, \quad 1 + \cos\mathrm{C}.$$

Nous reviendrons sur ce point tout à l'heure.

4. Les bissectrices AI, BI, CI rencontrent respectivement le cercle O_1 circonscrit à $I_a I_b I_c$ en M, N, P. Les tangentes en ces points au cercle O_1 déterminent le triangle *tangentiel* T du triangle MNP. Ce triangle T est inversement homothétique du triangle $\alpha'\beta'\gamma'$. Le centre d'homothétie L'_2 est un point de IO_1 tel que

$$\frac{L'_2 I}{L'_2 O_1} = \frac{r}{2R}.$$

Les distances x'_2, y'_2, z'_2 de ce point aux côtés du triangle ABC sont

$$x'_2 = \frac{r(4R - r_a)}{2R + r}, \quad y'_2 = \frac{r(4R - r_b)}{2R + r}, \quad z'_2 = \frac{r(4R - r_c)}{2R + r}.$$

L'_2 a pour conjugué harmonique par rapport à I et O_1 un point L_2, centre de similitude externe des cercles I et O_1 circonscrit à $I_a I_b I_c$, que nous allons déterminer par ses coordonnées normales par rapport à ABC.

Cherchons l'intersection L_2 des droites $I_a D$ et $I_b E$.

Les coordonnées normales des points D, E, F sont

$$0, \quad \cos^2\frac{C}{2}, \quad \cos^2\frac{B}{2}; \quad \cos^2\frac{C}{2}, \quad 0, \quad \cos^2\frac{A}{2},$$
$$\cos^2\frac{B}{2}, \quad \cos^2\frac{A}{2}, \quad 0,$$

celles de I_a, I_b, I_c sont

$$(-1, 1, 1), \quad (1, -1, 1), \quad (1, 1, -1).$$

Les équations des droites $I_a D$, $I_b E$ sont donc

$$\begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ 0 & \cos^2\frac{C}{2} & \cos^2\frac{B}{2} \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

$$\begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \cos^2\frac{C}{2} & 0 & \cos^2\frac{A}{2} \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

ou

$$\alpha\left(\cos^2\frac{C}{2}-\cos^2\frac{B}{2}\right)-\beta\cos^2\frac{B}{2}+\gamma\cos^2\frac{C}{2}=0,$$

$$\alpha\cos^2\frac{A}{2}+\beta\left(\cos^2\frac{A}{2}-\cos^2\frac{C}{2}\right)-\gamma\cos^2\frac{C}{2}=0.$$

Les coordonnées normales de L_2 sont donc proportionnelles aux déterminants tirés de la matrice

$$\begin{vmatrix} \cos^2\frac{C}{2}-\cos^2\frac{B}{2} & -\cos^2\frac{B}{2} & \cos^2\frac{C}{2} \\ \cos^2\frac{A}{2} & \cos^2\frac{A}{2}-\cos^2\frac{C}{2} & -\cos^2\frac{C}{2} \end{vmatrix},$$

ou, après suppression d'un facteur $\cos^2\frac{C}{2}$, aux quantités

$$\cos^2\frac{B}{2}+\cos^2\frac{C}{2}-\cos^2\frac{A}{2},$$

$$\cos^2\frac{C}{2}+\cos^2\frac{A}{2}-\cos^2\frac{B}{2},$$

$$\cos^2\frac{A}{2}+\cos^2\frac{B}{2}-\cos^2\frac{C}{2},$$

ou

$$\sin\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2},$$

$$\sin\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}\cos\frac{A}{2},$$

$$\sin\frac{C}{2}\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2},$$

ou enfin

$$\tang\frac{A}{2},\quad \tang\frac{B}{2},\quad \tang\frac{C}{2}.$$

Ce sont ces coordonnées auxquelles nous sommes arrivé géométriquement dans notre Mémoire : *Sur quatre triangles homothétiques* (*Nouvelles Annales*, mai 1915, p. 193), en obtenant les distances x_2, y_2, z_2

de L_2 aux côtés BC, CA, AB :

$$x_2 = \frac{rr_a}{2R - r}, \quad y_2 = \frac{rr_b}{2R - r}, \quad z_2 = \frac{rr_c}{2R - r}.$$

Nous devons ici ajouter une curieuse propriété de ce point.

Il est l'inverse triangulaire, par rapport au triangle ABC, *du point de Lemoine* K′ *du triangle* $I_a I_b I_c$.

K′ a en effet pour coordonnées normales, par rapport au triangle ABC,

$$\cot\frac{A}{2}, \quad \cot\frac{B}{2}, \quad \cot\frac{C}{2} \quad (^1).$$

Cette remarque donne quelques propriétés du point de Lemoine d'un triangle.

L_2 est à l'intersection des trois droites $I_a D$, $I_b E$, $I_c F$. Il est de plus le point de concours des droites AD′, BE′, CF′, D′, E′, F′ étant les pieds des hauteurs du triangle DEF, car A, B, C et D, E, F sont des points homologues dans les triangles semblables ABC et D′E′F′.

Les symétriques AD″, BE″, CF″ des droites AD′, BE′, CF′ par rapport aux bissectrices AI, BI, CI déterminent par leur intersection l'inverse triangulaire, par rapport à ABC, de L_2, c'est-à-dire le point K′ de Lemoine du triangle $I_a I_b I_c$.

Donc d'une manière générale :

Le point K *de Lemoine s'obtient en joignant les pieds des hauteurs d'un triangle aux symétriques*

---

(1) J. Neuberg, *Sur l'hyperbole de Feuerbach* (*Mathesis*, avril 1893, p. 81-89).

des pieds des hauteurs du triangle des contacts du cercle inscrit au triangle orthique par rapport aux milieux des côtés de ce dernier triangle.

On peut toujours tracer trois cercles ω_a, ω_b, ω_c tangents respectivement aux côtés B′A′ et A′C′, A′B′ et C′B′, C′B′ et A′C′ du triangle orthique et intérieurement au cercle circonscrit O au triangle ABC. Soient A″, B″, C″ les contacts de ces cercles avec le cercle O.

Les cercles H, inscrit au triangle A′B′C′, et ω_a, par exemple, ont pour centre de similitude externe le sommet A′; les cercles O et ω_a ont pour centre de similitude externe A″; L_2 est le centre de similitude externe des cercles O et H. Ces trois points A′, L_2 et A″ sont en ligne droite. Par conséquent :

Si dans un triangle ABC *on trace les cercles* ω_a, ω_b, ω_c, *respectivement tangents, intérieurement, au cercle circonscrit* O *et aux côtés* B′A′ *et* A′C′, A′B′ *et* C′B′, C′B′ *et* A′C′ *du triangle orthique, les droites* A′A″, B′B″, C′C″ *qui joignent les pieds des hauteurs aux contacts avec le cercle circonscrit, concourent au point* L_2 *inverse triangulaire, par rapport à* A′B′C′, *du point* K *de Lemoine du triangle* ABC.

Ou encore, *les triangles* A′B′C′ *et* A″B″C″ *sont homologiques et le centre d'homologie est le centre de similitude externe des cercles* O *circonscrit à* ABC *et* H *inscrit à* A′B′C′, *c'est-à-dire l'inverse triangulaire du point* K *de Lemoine du triangle* ABC *par rapport au triangle orthique* A′B′C′.

Les cercles O_1 et I, qui correspondent aux cercles précédents O et H d'un triangle ABC, ont pour centre

de similitude interne un point L_1 de IO_1 qui n'est autre que le centre d'homothétie interne des triangles $\alpha\beta\gamma$ et $\alpha'\beta'\gamma'$ du paragraphe 3.

L_1 a pour inverse triangulaire par rapport à ABC le point λ de coordonnées normales

$$\frac{1}{1+\cos A}, \quad \frac{1}{1+\cos B}, \quad \frac{1}{1+\cos C}.$$

Nous appellerons λ le *correspondant* du point K' de Lemoine de $I_aI_bI_c$; *il est situé sur l'hyperbole de Feuerbach*, inverse triangulaire de la droite IOO_1.

On peut construire aussi trois cercles ω'_a, ω'_b, ω'_c respectivement tangents aux côtés BA et AC, AB et CB, CB et AC, et extérieurement au cercle circonscrit O_1 de $I_aI_bI_c$ en A''_1, B''_1, C''_1. On démontre comme précédemment que *les droites* AA''_1, BB''_1, CC''_1 *concourent à l'inverse triangulaire* L_1 *de* λ *par rapport à* ABC ou que *les triangles homologiques* ABC *et* $A''_1B''_1C''_1$ *ont pour centre d'homologie* L_1.

5. Considérons aussi le triangle tangentiel T' à ABC par rapport au cercle circonscrit O. Il est inversement homothétique au triangle $\alpha'\beta'\gamma'$; le centre d'homothétie L_3 est encore un point de IO tel que

$$\frac{L_3I}{L_3O} = \frac{r}{R};$$

autrement dit L_3 est le centre de similitude interne des cercles inscrit et circonscrit au triangle ABC.

Les droites qui joignent les sommets du triangle ABC aux contacts homologues du cercle inscrit avec les côtés du triangle $\alpha'\beta'\gamma'$ se coupent en L_3. Comme chacune de ces droites est symétrique de AD, BE, CF, par rapport aux bissectrices intérieures des angles du

triangle ABC, on obtient ici une autre démonstration de cette propriété que nous avons donnée dans cette Revue [1] :

Dans un triangle, l'inverse triangulaire du point de Gergonne J *est le centre de similitude interne des cercles inscrit et circonscrit.*

Les trois triangles homothétiques $\alpha\beta\gamma$, $\alpha'\beta'\gamma'$ et T ont pour droites homologues

$$2R + r, \quad r \quad \text{et} \quad 2R.$$

D'où cette propriété remarquable que l'on peut rapprocher de celle contenue dans notre Mémoire : *Sur quatre triangles homothétiques* (*Nouvelles Annales*, mai 1915, p. 206) :

Toute droite du triangle $\alpha\beta\gamma$ *égale la somme des droites homologues dans les triangles* T *et* $\alpha'\beta'\gamma'$.

En particulier, *les côtés du triangle* $\alpha\beta\gamma$ *égalent respectivement la somme des côtés homologues dans les triangles* T *et* $\alpha'\beta'\gamma'$.

6. Les triangles $\alpha\beta\gamma$ et $A'B'C'$ des pieds des hauteurs de ABC ont pour centre d'homothétie un point L_4 de O_1H tel que

$$\frac{L_4H}{L_4O_1} = \frac{2R\cos A\cos B\cos C}{2R + r}.$$

Les coordonnées normales de ce point, par rapport à l'un ou à l'autre des triangles $A'B'C'$ et $\alpha\beta\gamma$, sont

$$\cot\frac{A}{2}, \quad \cot\frac{B}{2}, \quad \cot\frac{C}{2}.$$

[1] R. GOORMAGHTIGH et V. THÉBAULT, *Sur une question de Mannheim et ses applications à la géométrie du triangle* (*Nouvelles Annales*, t. XVI, 1916, p. 104).

De même $\alpha'\beta'\gamma'$ et $A'B'C'$, inversement homothétiques, ont leur centre d'homothétie L'_4 sur III de telle façon que

$$\frac{L'_4 I}{L'_4 H} = \frac{r}{2R \cos A \cos B \cos C}$$
$$= \frac{R \sin A \sin B \sin C}{p \cos A \cos B \cos C} = \frac{R}{p} \operatorname{tang} A \operatorname{tang} B \operatorname{tang} C$$
$$= \frac{\operatorname{tang} A + \operatorname{tang} B + \operatorname{tang} C}{\sin A + \sin B + \sin C}.$$

7. Dans le cas particulier où le triangle ABC est *rectangle* en A, le précédent paragraphe présente quelque curiosité.

Le triangle orthique $A'B'C'$ étant dans ce cas *aplati* suivant la hauteur AA' relative à l'hypoténuse, deux côtés de chacun des triangles $\alpha\beta\gamma$ et $\alpha'\beta'\gamma'$ deviennent parallèles et perpendiculaires à l'hypoténuse.

On a, par suite,

$$r_a = r + r_b + r_c$$

ou

$$r_b + r_c = 2R,$$

et *dans un triangle rectangle la somme des rayons des cercles exinscrits dans les angles aigus égale l'hypoténuse.*

8. Formons les triangles $D_1E_1F_1$ et $D'_1E'_1F'_1$ des contacts des côtés des triangles $\alpha\beta\gamma$ et $\alpha'\beta'\gamma'$ avec leurs cercles inscrits O_1 et I. Ces triangles sont, le premier directement, le second inversement homothétiques au triangle ABC.

On a en effet, par exemple,

$$\widehat{\gamma D_1 E_1} = 90° - \hat{\gamma} = \hat{C} = \widehat{A C_1 B_1}.$$

Les droites AD_1 et AD'_1 sont du reste symétriques

de AD par rapport à I_bI_c. Les trois points D_1, A et D'_1 sont par suite en ligne droite. Il en est de même de E_1 B et E'_1, F_1, C et F'_1.

Ces trois droites $D_1AD'_1$, $E_1BE'_1$, $F_1CF'_1$, symétriques respectivement de AD, BE, CF par rapport aux bissectrices AI, BI, CI, *sont concourantes au point* L_3 *inverse triangulaire du point de Gergonne* J *de* ABC.

L_3 est par suite le centre de similitude commun aux deux groupes de cercles O_1 circonscrit à $D_1E_1F_1$ et O, O et I.

De plus, en nous rappelant notre Mémoire précédemment cité : *Sur une question de Mannheim et ses applications à la géométrie du triangle*, nous obtenons ce résultat :

Les droites $D_1AD'_1$, $E_1BE'_1$, $F_1CF'_1$ *rencontrent respectivement le cercle* O *circonscrit au triangle* ABC *aux points de contact des cercles tangents extérieurement à* O *et respectivement aux côtés* BA *et* AC, AC *et* CB, CB *et* BA.

9. Les triangles $\alpha\beta\gamma$ et ABC sont homologiques; car la droite $A\alpha$, par exemple, qui joint les centres de similitude externes A et α des groupes de cercles I et I_a, I_a et O_1 inscrit au triangle $\alpha\beta\gamma$, contient aussi le centre de similitude externe des cercles O_1 et I, c'est-à-dire un point R de IO_1 tel que

$$\frac{RI}{RO_1} = \frac{r}{2R + r}.$$

Les distances x_4, y_4, z_4 de ce point aux côtés du triangle ABC sont

$$x_4 = \frac{r(r + r_a)}{2R}, \qquad y_4 = \frac{r(r + r_b)}{2R}, \qquad z_4 = \frac{r(r + r_c)}{2R}.$$

Les coordonnées normales de ce point par rapport à ABC sont donc

$$r + r_a, \quad r + r_b, \quad r + r_c,$$

ou

$$\sin\frac{A}{2}\cos\frac{B-C}{2}, \qquad \sin\frac{B}{2}\cos\frac{A-C}{2}, \qquad \sin\frac{C}{2}\cos\frac{A-B}{2}.$$

Le centre d'homologie des triangles $\alpha\beta\gamma$ et ABC est donc ce point R; l'axe d'homologie est la droite Δ qui joint les pieds des bissectrices extérieures du triangle ABC.

Les triangles $\alpha\beta\gamma$ et $I_a I_b I_c$ sont aussi homologiques; le centre est O_1 et l'axe la droite Δ précédente.

D'où cette propriété :

Les triangles $\alpha\beta\gamma$, ABC *et* $I_a I_b I_c$ *sont homologiques entre eux; l'axe commun d'homologie est la droite* Δ *des pieds des bissectrices extérieures du triangle* ABC *et les centres respectifs sont le centre de similitude externe des cercles* I *et* O_1 *de rayon* $2R + r$, *le point* O_1 *et le centre* I.

[K[1]1c]

SUR LE BARYCENTRE DES TRIANGLES PSEUDOPODAIRES;

Par M. AURIC.

Considérons, dans un triangle de référence $A_1 A_2 A_3$, deux points M, N dont les coordonnées barycentriques sont m_1, m_2, m_3; n_1, n_2, n_3.

Par M menons une parallèle à $A_1 N$ qui coupe $A_2 A_3$ en M_1; on mène deux autres droites analogues qui

déterminent deux autres points M_2, M_3; le triangle

$$M_1M_2M_3$$

sera appelé *pseudopodaire* de M par rapport à N; il est clair que si N est l'orthocentre H de $A_1A_2A_3$, $M_1M_2M_3$ est le triangle podaire de M; si M et N viennent coïncider en un point quelconque P, on obtient le triangle cévien ou pédal de P.

Les coordonnées barycentriques de M_1, M_2, M_3 sont

$$\begin{array}{ccc} 0, & m_2+\dfrac{n_2m_1}{n_2+n_3}, & m_3+\dfrac{n_3m_1}{n_2+n_3}, \\ m_1+\dfrac{n_1m_2}{n_3+n_1}, & 0, & m_3+\dfrac{n_3m_2}{n_3+n_1}, \\ m_1+\dfrac{n_1m_3}{n_1+n_2}, & m_2+\dfrac{n_2m_3}{n_1+n_2}, & 0. \end{array}$$

Dès lors le barycentre U de $M_1M_2M_3$ a pour coordonnées

$$\begin{aligned} u_1 &= 2m_1+n_1\left(\frac{m_2}{n_3+n_1}+\frac{m_3}{n_1+n_2}\right) \\ &= \left(2-\frac{n_1}{n_2+n_3}\right)m_1+n_1\left(\frac{m_1}{n_2+n_3}+\frac{m_2}{n_3+n_1}+\frac{m_3}{n_1+n_2}\right) \end{aligned}$$

et deux autres expressions analogues.

Lorsque M et N viennent coïncider en P la coordonnée u_1 peut s'écrire

$$\begin{aligned} u_1 = p_1\left(3+\frac{p_1}{p_2+p_3}+\frac{p_2}{p_3+p_1}+\frac{p_3}{p_1+p_2}\right) \\ -(p_1+p_2+p_3)\frac{p_1}{p_2+p_3} \end{aligned}$$

ou, plus simplement,

$$u_1 = \frac{p_1}{p_3+p_1}+\frac{p_1}{p_1+p_2},$$

car alors les coordonnées du triangle pédal sont

$$\begin{array}{ccc} 0, & \dfrac{p_2}{p_2+p_3}, & \dfrac{p_3}{p_2+p_3}, \\ \dfrac{p_1}{p_3+p_1}, & 0, & \dfrac{p_3}{p_3+p_1}, \\ \dfrac{p_1}{p_1+p_2}, & \dfrac{p_2}{p_1+p_2}, & 0. \end{array}$$

Pour que U soit situé sur la droite MN, on doit avoir

$$\frac{n_1 m_1}{n_2+n_3} = \mu n_1 - \lambda m_1$$

ou

$$\frac{\mu}{m_1} = \frac{1}{n_2+n_3} + \frac{\lambda}{n_1}$$

et, par élimination de λ et de μ,

$$\Sigma\, n_1(n_2^2 - n_3^2) m_2 m_3 = 0.$$

Lorsque N est donné cette équation représente une conique circonscrite au triangle de référence et passant par N, par l'inverse de $N\left(\frac{1}{n_1}, \frac{1}{n_2}, \frac{1}{n_3}\right)$ et par le complémentaire de $N(n_2+n_3,\ n_3+n_1,\ n_1+n_2)$: cette conique qui joue un rôle assez important dans la géométrie du triangle est la transformée inverse de la droite qui joint un point N à son inverse (N^{-1}).

On a donc le théorème suivant :

Si N, *son inverse* (N^{-1}) *et l'inverse de* $M(M^{-1})$ *sont en ligne droite, le barycentre du triangle pseudopodaire de* M *par rapport à* N *est sur la droite* MN.

Lorsque M est donné, l'équation précédente représente une cubique circonscrite au triangle de référence et passant par M, par l'inverse de $M(M^{-1})$, par l'anticomplémentaire de M

$$(m_2+m_3-m_1,\ m_3+m_1-m_2,\ m_1+m_2-m_3)$$

et par le barycentre G de $A_1A_2A_3$. Cette cubique est une transformée homographique de la cubique lieu des centres des coniques circonscrites à $A_1A_2A_3$ et dont les normales en ces trois points sont concourantes : le lieu du point de concours est également, comme on sait, une transformée homographique de cette cubique.

Le barycentre U vient en N pour $\lambda = -2$, c'est-à-dire

$$\frac{\mu}{m_1} = \frac{1}{n_2 + n_3} - \frac{2}{n_1},$$

U vient en M pour $\lambda = 1$ et λ racine de l'équation

$$X^2 + X + \frac{2n_1n_2n_3}{(n_1+n_2)(n_2+n_3)(n_3+n_1)} = 0;$$

il y a donc trois positions (réelles ou imaginaires) de M pour lesquelles N étant donné le barycentre de $M_1M_2M_3$ est en M.

Lorsque M est le complémentaire de N

$$(m_1 = n_2 + n_3, \ \ldots),$$

on a

$$u_1 = 2m_1 + 2n_1 = 2(n_1 + n_2 + n_3),$$

le barycentre de $M_1M_2M_3$ coïncide avec celui de $A_1A_2A_3$ et cela était aisé à prévoir puisque, dans ce cas, M_1 est le milieu de A_2A_3, M_2 celui de A_3A_1, etc. en vertu de la relation

$$NG = 2GM.$$

On peut se demander dans quel cas un triangle pseudopodaire est également pédal, c'est-à-dire homologique de $A_1A_2A_3$; il suffit d'écrire l'égalité des deux termes diagonaux du déterminant formé par les coordonnées de ce triangle.

On obtient après réductions

$$\Sigma n_1^2(n_2+n_3)m_2m_3(m_2-m_3)$$
$$=\Sigma n_1(n_3^2-n_2^2)m_2m_3(m_2+m_3).$$

Selon qu'on se donne M ou N on a une cubique circonscrite au triangle de référence pour le lieu de l'autre point; mais le problème se simplifie beaucoup si l'on se place dans l'hypothèse du théorème de Kariya ([1]), c'est-à-dire si l'on admet que les inverses de M, de N et du centre d'homologie P, soit (M^{-1}), (N^{-1}), (P^{-1}), sont en ligne droite.

On trouve aisément que

$$\mu m_1^2 = \frac{1}{n_2}+\frac{1}{n_3},$$

d'où

$$\frac{\lambda}{n_1} = m_2^2+m_3^2-m_1^2.$$

Le point (m_1^2, m_2^2, m_3^2) que nous représenterons par (M^2) est alors le complémentaire de (N^{-1}).

Le centre d'homologie P de $M_1M_2M_3$ et $A_1A_2A_3$ a pour coordonnées

$$\frac{1}{m_2+m_3-m_1}, \quad \frac{1}{m_3+m_1-m_2}, \quad \frac{1}{m_1+m_2-m_3},$$

de sorte que (P^{-1}) est l'anticomplémentaire de M.

Le barycentre de $M_1M_2M_3$ se trouve à la fois sur la droite qui joint P à l'inverse de M et sur celle qui joint M au point $\left(\frac{m_1^2}{n_1}, \frac{m_2^2}{n_2}, \frac{m_3^2}{n_3}\right)$ que nous désignerons par $\left(\frac{M^2}{N}\right)$.

On peut donc énoncer le théorème suivant qui est une généralisation de celui de Kariya :

([1]) Voir *Nouvelles Annales*, numéro de mai 1915, p. 222.

Soit $M_1M_2M_3$ *le triangle pseudopodaire de* M *par rapport à* N : *admettons en outre que* $M_1M_2M_3$ *est le triangle pédal d'un point* P *et que* M, N, P *sont sur une conique* C *circonscrite à* $A_1A_2A_3$. *Si l'on prend sur les droites* MM_1, MM_2, MM_3 *des points* Q_1, Q_2, Q_3 *tels que*

$$\frac{MM_1}{MQ_1}=\frac{MM_2}{MQ_2}=\frac{MM_3}{MQ_3},$$

les droites A_1Q_1, A_2Q_2, A_3Q_3 *concourent en un point* Q *dont le lieu est précisément la conique* C *lorsque le rapport ci-dessus varie. Le barycentre de* $M_1M_2M_3$ *se trouve à l'intersection des droites*

$$P(M^{-1}) \qquad \text{et} \qquad M\left(\frac{M^2}{N}\right).$$

En particulier, dans le cas du théorème de Kariya proprement dit, M est le centre du cercle inscrit I, N l'orthocentre H, P le point de Gergonne, (M^{-1}) le point de rencontre des antibissectrices et

$$\left(\frac{M^2}{N}\right)=(\sin 2A_1,\ \sin 2A_2,\ \sin 2A_3)$$

le centre du cercle circonscrit O.

On a donc la proposition suivante :

Le centre de gravité du triangle podaire de I *se trouve à l'intersection de la droite* OI *avec celle qui joint le point de Gergonne à l'inverse de* I.

Cette proposition s'applique également aux cercles ex-inscrits à la condition de prendre les points correspondants.

[113]

SUR LE PRODUIT DES NOMBRES DONT CHACUN EST UNE SOMME DE DEUX CARRÉS;

Par M. Mathieu WEILL.

Soit un nombre N égal à une somme de deux carrés, on aura

$$N = a^2 + b^2 = (a + bi)(a - bi),$$

i étant le symbole imaginaire $\sqrt{-1}$.

Représentons $a + bi$ par A et l'imaginaire conjuguée $a - bi$ par A_1. On aura ainsi

$$N = A.A_1.$$

Un autre nombre qui sera aussi une somme de deux carrés s'écrira

$$N' = c^2 + d^2 = (c + di)(c - di)$$
$$= B.B_1.$$

Le produit NN' s'écrira

$$NN' = AA_1BB_1$$
$$= (AB)(A_1B_1)$$
$$= (AB_1)(A_1B).$$

Or AB et A_1B_1 sont deux imaginaires conjuguées, et leur produit est une somme de deux carrés; de même pour AB_1 et A_1B. On voit donc que le produit de deux nombres, dont chacun est une somme de deux carrés est, de deux manières, une somme de deux carrés, résultat bien connu.

Soit, maintenant, un produit de trois nombres N, N′, N″, dont chacun est une somme de deux carrés; on aura

$$N = AA_1,$$
$$N' = BB_1,$$
$$N'' = CC_1.$$

Considérons AB et AB_1 et adjoignons C et C_1 successivement; nous aurons

$$ABC,$$
$$ABC_1,$$
$$AB_1C,$$
$$AB_1C_1.$$

Il est facile de voir que chacun de ces produits est distinct des autres, ainsi ABC diffère des trois autres, l'un par le changement de C en C_1, l'autre par le changement de B en B_1; et le dernier par le changement de BC en son conjugué B_1C_1; de même ABC_1 diffère des deux qui le suivent; enfin AB_1C diffère de AB_1C_1.

Dès lors, le produit NN′N″ sera, de quatre manières *différentes*, une somme de deux carrés, car on aura

$$\begin{aligned} NN'N'' &= (ABC)(A_1B_1C_1) \\ &= (ABC_1)(A_1B_1C) \\ &= (AB_1C)(A_1BC_1) \\ &= (AB_1C_1)(A_1BC), \end{aligned}$$

les facteurs entre parenthèses étant deux à deux conjugués.

En considérant, de même, quatre nombres

$$N = AA_1,$$
$$N' = BB_1,$$
$$N'' = CC_1,$$
$$N''' = DD_1,$$

on considérera les huit facteurs obtenus en adjoignant D et D_1 à chacun des quatre précédents,

$$\begin{array}{l} ABCD, \\ ABCD_1, \\ ABC_1D, \\ ABC_1D_1, \\ AB_1CD. \\ \ldots\ldots\ldots \end{array}$$

Il est facile de voir que ces huit facteurs sont tous différents, et, en adjoignant à chacun son conjugué, on aura huit décompositions, *distinctes* de N, N′, N″, N‴ en une somme de deux carrés. On a donc enfin le théorème général suivant, que je me proposais d'établir :

Théorème. — *Le produit de p nombres, dont chacun est une somme de deux carrés, est une somme de deux carrés, de* 2^{p-1} *manières, et les résultats sont, tous, différents.*

Considérons, par exemple, le produit de cinq nombres, qui s'expriment par

$$a_1^2 + b_1^2, \quad a_2^2 + b_2^2, \quad \ldots, \quad a_5^2 + b_5^2.$$

Considérons le produit

$$P = (a_1 + b_1 i)(a_2 + b_2 i)\ldots(a_5 + b_5 i).$$

Il est facile de le mettre sous la forme $A + Bi$, ce qui permet de mettre le produit des cinq nombres sous la forme $A^2 + B^2$. On a, en effet,

$$P = b_1 b_2 \ldots b_5 \left[\frac{a_1}{b_1} + i\right] \ldots \left[\frac{a_5}{b_5} + i\right],$$

$$P = b_1 b_2 \ldots b_5 \left[i^5 + i^4 \sum \frac{a_1}{b_1} + i^3 \sum \frac{a_1}{b_1}, \frac{a_2}{b_2} + \ldots\right].$$

Le calcul n'offre aucune difficulté, mais il est de plus

en plus compliqué, à mesure que le nombre des facteurs, qui, ici, est de cinq, devient plus grand. On voit qu'au moyen des imaginaires, le calcul est praticable. Le calcul direct présente des difficultés insurmontables, quand le nombre des facteurs est un peu grand.

CONCOURS D'ADMISSION A L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE EN 1916 [1]. SUJETS DES COMPOSITIONS.

Mathématiques.

Première composition.

I. *Intégrer l'équation différentielle*

$$(E) \quad 2x(x-1)y' + (2x-1)y + 1 = 0 \qquad \left(y' = \frac{dy}{dx}\right).$$

Une intégrale étant déterminée par la valeur qu'elle prend pour une valeur particulière de x, dans quel intervalle de variation de x cette intégrale demeure-t-elle définie? Que devient l'intégrale aux limites de cet intervalle?

II. *Faire dans l'équation* (E) *le changement de variables*

$$x = \frac{(1+u)^2}{4u}, \qquad y = \frac{2uv}{1+u^2};$$

déduire du résultat de ce calcul une représentation

---

[1] Il n'y a pas eu de concours en 1915. Celui-ci est ouvert pour l'admission de 70 élèves.

paramétrique des intégrales de l'équation (E). *Cette représentation est-elle valable pour toutes les valeurs réelles de x? La comparer au résultat de l'intégration directe de l'équation* (E).

III. *On propose de satisfaire à l'équation* (E) *par un développement de la forme*

$$y = \varphi(x) + \frac{1}{\sqrt{|x|}}\psi(x),$$

où $\varphi(x)$ et $\psi(x)$ sont deux séries entières en x et où $|x|$ désigne la valeur absolue de x. Trouver les séries $\varphi(x)$ et $\psi(x)$. Dans quel intervalle le nouveau mode de représentation des intégrales ainsi obtenu est-il valable? Le comparer au résultat de l'intégration directe.

IV. *Forme de la courbe $y = \varphi(x)$. Forme des diverses courbes intégrales.* (4 heures.)

Deuxième composition.

Un plan vertical est rapporté à deux axes Ox *et* Oy; *l'axe* Ox *est horizontal;* Oy *est vertical et dirigé vers le haut. Dans ce plan se trouve la trajectoire d'un point de masse unité, libre, pesant et subissant de la part de l'air une résistance* R *tangente à la trajectoire. Les unités choisies étant la seconde de temps et le mètre, la trajectoire a pour équation*

$$(1) \qquad y = ax - 8x^2 - x^3 \qquad (a > 0).$$

Le projectile part de l'origine O *sur l'arc* OFM *situé dans l'angle des coordonnées positives; il*

monte au point le plus haut F *et retombe ensuite sur* Ox *en son point de chute* M.

I. *Calculer, en fonction de* a, *le coefficient angulaire* m *de la trajectoire au point de chute* M *et la flèche* f, *ordonnée du point* F.

II. *Exprimer, en fonction du temps* t, *l'abscisse* x *du mobile et calculer le temps* T *qu'il met à parcourir l'arc* OFM. *Déterminer, en fonction de* x, *la composante* X *suivant* Ox *de la résistance* R.

III. *Évaluer le travail des forces agissant sur le mobile pendant le trajet* OFM. *Trouver la grandeur* V_M *de la vitesse au point de chute.*

IV. *Calculer l'aire balayée par le vecteur vitesse durant le même trajet.*

V. *Divers mobiles identiques partent simultanément de l'origine sur les cubiques qui correspondent aux différentes valeurs de a. Trouver, à un instant ultérieur quelconque, le lieu de leurs positions, l'enveloppe de leurs vitesses et l'enveloppe des normales à leurs trajectoires.*

Nota. — Ce problème se rattache au tir du canon de campagne de 75.

(4 heures.)

Calcul.

L'échelle des abscisses horizontales étant 1^{cm} *pour* 500^{m}; *l'échelle des ordonnées verticales,* 1^{cm} *pour* 0^{m},50, *si l'on prend pour unité le centimètre du dessin, la trajectoire du projectile de* 75^{mm} *est représentée approximativement par la formule*

$$y = ax - 8x^2 - x^3, \quad (1)$$

l'origine O *étant au point de départ du projectile. Au deuxième point* M *d'intersection avec* Ox, *le coefficient angulaire* m *de la tangente à la courbe* (1) *est*

$$(2) \qquad m = 8\sqrt{a+16} - 2a - 32.$$

La durée en secondes du trajet jusqu'au point de chute M *est, dans le même système d'unités, donnée par la formule*

$$(3) \qquad T = \frac{1}{9\sqrt{\gamma}} \left\{ (6\sqrt{a+16} - 8)^{\frac{3}{2}} - 64 \right\},$$

où γ *est l'accélération de la pesanteur dont la grandeur est* 981 C.G.S.

La lettre α *désignant l'angle de la trajectoire vraie avec le plan horizontal au départ, on fait varier* α *par degrés de* 0° *à* 10°. *Calculer, pour chacun des points de chute correspondants* M, *les éléments suivants :*

1° *En mètres, la portée réelle* OM;

2° *En secondes, la durée* T *du trajet;*

3° *En degrés, l'angle* μ *que fait la trajectoire réelle avec le plan horizontal en* M.

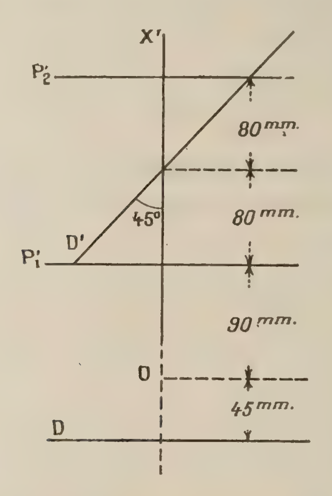
(1 heure.)

Épure de Géométrie descriptive.

Un hyperboloïde de révolution a pour axe la verticale (O, X′), *pour génératrice la droite de front* (D, D′). *On considère le solide* S *limité par l'hyperboloïde et les deux plans horizontaux* P'_1 *et* P'_2.

Un cylindre de révolution a pour axe la droite (D, D′) *et pour génératrice celle des génératrices de l'hyperboloïde qui est parallèle à* (D, D′).

On représentera ce qui reste du solide S supposé



opaque, quand on en supprime la partie située à l'intérieur du cylindre.

On se conformera, pour la mise en place, aux données du croquis. Le point O *sera pris sur le grand axe de la feuille, à* 120^{mm} *au-dessus du bord inférieur de celle-ci.* (4 heures.)

CORRESPONDANCE.

R. Bouvaist. — *Au sujet de deux articles.* — I. La solution du problème de Pappus généralisé, parue dans le numéro d'avril 1916 (M. Joffroy), n'est pas nouvelle. (*Voir*, par exemple, les Exercices de géométrie, par F. G. M.)

L'enveloppe d'un segment de longueur constante dont les extrémités décrivent deux droites Ox et Oy est évidemment une courbe de quatrième classe admettant pour axes les bissectrices de l'angle xOy. Il en résulte immédiatement que, quel que soit l'angle xOy, le problème de Pappus dépend de la résolution de deux équations du second degré et est, par suite, susceptible d'être résolu avec la règle et le compas.

II. Dans le numéro de mai 1916, M. Barisien démontre que le périmètre d'un limaçon de Pascal est équivalent au périmètre d'une ellipse qui a pour demi-axes les distances du point double à chacun des sommets du limaçon.

Cette proposition résulte immédiatement des deux suivantes, qui sont presque classiques :

α. *Lorsqu'une courbe fermée roule sans glisser sur une droite fixe, l'arc de roulette décrit par un point* P *quelconque, attaché à cette courbe mobile, est égal à l'arc de podaire compris entre les projections de* P *sur les deux tangentes à la courbe mobile, qui coïncident avec la droite fixe à l'origine et à la fin du mouvement.*

[Théorème dû à Steiner et dont on trouvera une démonstration dans un article de M. Balitrand (*N. A.*, juin 1915, p. 254).]

β. *Un cercle de rayon a roule sans glisser sur une droite fixe, en entraînant un point* M *situé à une distance l de son centre; l'arc de roulette décrit par le point* M *pendant une révolution complète du cercle mobile est égal au périmètre d'une ellipse dont les demi-axes sont $a + l$ et $a - l$.*

La proposition de M. Barisien n'est d'ailleurs qu'un

cas particulier de la suivante, due à William Roberts :

Lorsqu'une cartésienne se compose de deux boucles fermées dont l'une est complètement intérieure à l'autre, les rayons vecteurs issus d'un foyer coupent ces deux boucles en deux points correspondants M *et* M'; *la différence de deux arcs correspondants est égale à un arc d'ellipse.*

ANCIENNES QUESTIONS NON RÉSOLUES.

Questions de Laguerre [1].

546 (**1860**, 404). — Étant donnée une conique A, trouver les transformations qui la changent en une conique B, de telle sorte que les normales à la conique A restent, par la transformation, normales à la conique B. Même question pour les surfaces.

772 (**1866**, 384). — Le nombre des sommets [2] d'une courbe algébrique est, en général, donné par la formule

$$3i + 5c - 3d - 3p,$$

dans laquelle i, c, d représentent le nombre des points d'inflexion, la classe, le degré de la courbe donnée, et p le nombre des branches paraboliques.

848 (**1868**, 137). — Soit une courbe gauche du quatrième

---

[1] Le lecteur pourra se référer aux *Œuvres de Laguerre*, où il trouvera très probablement des indications utiles pour la solution de la plupart de ces questions. (*Note de la Rédaction.*)

[2] Les sommets sont les points où la courbure est maximum ou minimum.

ordre résultant de l'intersection de deux surfaces du second degré. Il existe sur une telle courbe seize points où la torsion est nulle; si, par trois quelconques de ces points, on mène un plan, de deux choses l'une : ou ce plan passera par l'un des treize autres, ou il touchera la courbe en l'un des trois points choisis.

891 (**1868**, 336). — On considère un hyperboloïde à deux nappes et un point de l'hyperbole focale de cette surface; on construit les différents cônes ayant pour sommet ce point et pour bases les sections circulaires de l'hyperboloïde; trouver le lieu formé par les focales de ces cônes.

892 (**1868**, 336). — Une sphère variable coupe le plan d'une conique suivant un cercle fixe; la développable circonscrite à cette sphère et à la conique a trois lignes doubles, outre la conique fixe. Chacune de ces lignes doubles, qui est une conique, décrit, lorsque la sphère varie, une surface du second degré ayant pour focale la conique donnée [1].

893 (**1868**, 336). — Si l'on coupe un tore, ou plus généralement une cyclide, par une série de sphères ayant pour centre un point fixe donné, toutes les courbes d'intersection ainsi obtenues peuvent être placées sur un même cône du deuxième degré.

989 (**1870**, 192). — Une conique passant par quatre points m, n et p, q, soit h le point de rencontre des droites mn et pq, et désignons respectivement par a et b les points où une tangente quelconque à la conique coupe les droites mn et pq.

Démontrer qu'on a la relation suivante :

$$\frac{\sqrt{am.bp}}{\sqrt{hm.hp}} + \frac{\sqrt{an.bq}}{\sqrt{hn.hq}} = \mathrm{C}\sqrt{ah.bh},$$

la lettre C désignant une constante.

---

[1] Chasles a démontré que les trois coniques doubles dont il s'agit sont sur trois surfaces homofocales (Remarque de Bourget, rédacteur).

1004 (**1870**, 432). — Par deux points fixes on mène un cercle variable; soient a et b deux des points où ce cercle coupe une conique fixe; le cercle variant, la droite ab enveloppe une courbe; construire géométriquement les points de contact de ab avec son enveloppe.

1058 (**1872**, 95). — On donne une cyclide et une sphère; leur courbe d'intersection est une courbe du quatrième ordre, par laquelle on peut faire passer quatre cônes. Deux des sommets de ces cônes se trouvent respectivement sur chacun des axes de la surface [1]; lorsque le centre de la sphère est fixe et que son rayon varie, ces deux sommets décrivent les axes; quel est le lieu décrit par les sommets des deux autres cônes?

1092 (**1872**, 478). — On a deux cercles dans un même plan; le premier est parcouru d'un mouvement uniforme par un point M, et le second est parcouru en sens inverse et d'un mouvement uniforme par un point m; la droite élevée à chaque instant par le milieu de la corde Mm perpendiculairement à cette corde enveloppe une conique; construire cette conique.

Trouver la propriété analogue dans l'espace.

1234 (**1877**, 240). — Intégrer l'équation différentielle

$$y\frac{d^2y}{dx^2}-\frac{2}{3}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2=f(x),$$

$f(x)$ désignant un polynome du troisième degré.

1390 (**1882**, 141). — Considérons l'équation $f(x)=0$ qui a toutes ses racines réelles; k désignant un nombre réel arbitraire, supposons que l'équation $f(x)+k=0$ ait m racines imaginaires. Démontrer que l'équation

$$f'^2(x)-f(x)f''(x)-kf''(x)=0$$

a m racines réelles, toutes les autres étant imaginaires.

---

(1) *Voir* MANNHEIM, *Applications, etc.* (**1869**, 73). Les axes de la cyclide sont les droites fixes par lesquelles passent respectivement les plans des lignes de courbure de chaque système.

1392 (**1882**, 142). — Si l'équation

$$a + bx + cx^2 + \ldots + kx^n = 0$$

a toutes ses racines réelles, démontrer que, ω étant une quantité réelle quelconque plus petite que l'unité, l'équation

$$a + b\omega x + c\omega^4 x^2 + \ldots + k\omega^{n^2} x^n = 0$$

a également ses racines réelles.

1393 (**1882**, 142). — Soit le polynome

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n;$$

supposons qu'en ajoutant à ce polynome un certain nombre de termes de degré supérieur à n, on puisse obtenir un autre polynome $f(x)$, tel que l'équation $f(x) = 0$ ait toutes ses racines réelles; démontrer que l'équation

$$\frac{a_0}{1.2.3\ldots n} + \frac{a_1 x}{1.2.3\ldots(n-1)} + \frac{a_2 x^2}{1.2.3\ldots(n-2)} + \ldots + \frac{a_{n-2} x^{n-2}}{1.2} + \frac{a_{n-1} x^{n-1}}{1} + a_n x^n = 0$$

a toutes ses racines réelles.

1394 (**1882**, 142). — $f(x)$ désignant un polynome quelconque à coefficients réels, on peut toujours déterminer un nombre positif ω, tel que le développement de $e^{\omega x} f(x)$, suivant les puissances croissantes de x, présente précisément autant de variations que l'équation $f(x) = 0$ a de racines positives.

1435 (**1883**, 144). — Quatre semi-droites A, B, C et D sont données; soit a le point où A est touchée par le cycle inscrit dans le triangle ABC, et d le point où D est touchée par le cycle inscrit dans le triangle DBC; démontrer que le point milieu du segment ad est sur l'axe radical des cycles inscrits dans les triangles ABD et ACD.

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES.

1582.

(1888, p. 160.)

Les coniques semblablement situées qui ont même cercle directeur sont inscrites au même carré. Démontrer aussi que, si deux telles coniques se coupent en M, *les tangentes au point* M *font des angles égaux avec un côté du carré.*

R.-W. GENESE.

SOLUTION

PAR UN ABONNÉ.

L'énoncé 1582 n'est pas clair; peut-être même n'est-il pas exact. Que signifie « semblablement situées »? S'agit-il de coniques semblables et semblablement situées, c'est-à-dire homothétiques; ou bien de coniques simplement semblables. Nous choisirons cette dernière interprétation qui est la plus large.

Que faut-il entendre par cercle directeur? Tantôt on désigne ainsi le cercle lieu des sommets des angles droits circonscrits à la conique (SALMON, *Sect. coniq.*, p. 455); tantôt le cercle qui a pour centre un foyer de la courbe et pour rayon le grand axe.

Dans le premier cas les coniques sont concentriques et, étant déjà semblables, elles sont égales; puisque la somme des carrés de leurs axes est constante. Leur enveloppe se compose alors de deux cercles ayant même centre que les coniques données et pour rayons respectivement le grand et le petit axe de ces coniques.

Dans le second cas les coniques ont un foyer commun et sont encore égales. Leur équation générale est, en prenant le foyer comme origine,

$$x^2 + y^2 - e^2(x\cos\varphi + y\sin\varphi - p)^2 = 0,$$

où e et p sont des constantes. φ est donc la seule variable que

renferme l'équation précédente et la recherche de l'enveloppe ne présente pas de difficultés. Mais comme résultat on ne trouve pas des droites.

Nous souhaitons qu'un autre abonné soit plus heureux que nous et donne de la question 1582 une interprétation qui permette de retrouver les résultats qui y sont énoncés.

1657.

(1893, p. 53*.)

On projette orthogonalement un ellipsoïde sur tous ses plans tangents.

Déterminer :

1° *L'équation de la surface qui limite la région occupée par toutes les ellipses de contour apparent ainsi obtenues ;*

2° *Le nombre des points de contact de cette surface et de l'axe de ces ellipses.* MANNHEIM.

SOLUTION

Par M. H. BROCARD.

Sans apporter la solution complète, je pense pouvoir indiquer le moyen d'y parvenir.

Soit ε un ellipsoïde, orienté n'importe comment, ayant son centre O sur le plan P du tableau qui est alors un plan sécant de la surface cherchée Σ.

Le plan P coupe ε suivant une ellipse E ayant pour demi-axes R_1 et R_2.

Menons une tangente quelconque t et les deux tangentes perpendiculaires p', p'', qui la rencontrent en V, W.

t est la trace d'un plan I tangent à ε perpendiculaire au tableau ; p', p'' forment les génératrices de contour apparent du cylindre projetant ε sur I.

La section de Σ par le plan P est donc le lieu des points V, W ou le cercle orthoptique de E. Ce cercle a pour rayon

$$\sqrt{R_1^2 + R_2^2}.$$

Ainsi, la surface Σ a une infinité de cercles ayant tous leur centre en O, mais les cercles sont de rayon variable, de sorte que Σ ne saurait être une sphère.

D'ailleurs, Σ contient aussi une infinité d'ellipses t dont

chacune provient de la projection orthogonale, sur I, de l'ellipse δ contenue dans le plan J conjugué à la direction p' ou p'' (sa trace est le diamètre de l'ellipse E joignant les points de contact des tangentes p', p'').

La surface Σ est tout entière extérieure à l'ellipsoïde ε et a seulement deux points de contact V et W avec chaque ellipse du plan I.

Revenant aux axes principaux de ε, avec $a > b > c$, on voit que Σ a pour sections principales des cercles de rayons

$$\sqrt{a^2+b^2},\quad \sqrt{a^2+c^2},\quad \sqrt{b^2+c^2},$$

dans les plans des xy, des xz et des yz. Σ est donc une sorte de dilatation de ε. Elle est au moins du quatrième degré, et elle admet pour plans de symétrie ceux de ε.

Pour en former l'équation, la méthode la plus simple et la plus expéditive sera sans doute la suivante, fondée sur la génération par les cercles OVW. On y parviendra en utilisant les formules de Painvin proposées dans la question 824 (1867, p. 432), résolue 1868, p. 91-96 par Maffiotti et p. 280-282 par Housel.

L'ellipsoïde ε ayant pour équation

$$A x^2 + A' y^2 + A'' z^2 - 1 = 0,$$

avec

$$A = \frac{1}{a^2},\qquad A' = \frac{1}{b^2},\qquad A'' = \frac{1}{c^2},$$

le plan P (tout à l'heure plan du tableau) sera représenté par l'équation

$$(1)\qquad \alpha x + \beta y + 1 = 0,$$

et en posant

$$\frac{1}{R_1^2} + \frac{1}{R_2^2} = M$$

et

$$R_1^2 R_2^2 = N,$$

d'où

$$(2)\qquad R_1^2 + R_2^2 = MN,$$

M et N ayant les valeurs indiquées (*loc. cit.*, question et réponses 824), la surface Σ sera le lieu du cercle de section,

par le plan (1), de la sphère ayant pour équation

$$(3) \qquad x^2+y^2+z^2-R_1^2-R_2^2=0,$$

et il restera à éliminer α et β entre les équations (1), (2), (3).

M et N se déduisent d'un certain déterminant qui se simplifie beaucoup dans le cas particulier, puisqu'il devient le déterminant troué

$$\begin{vmatrix} A & 0 & 0 & 0 & \alpha \\ 0 & A' & 0 & 0 & \beta \\ 0 & 0 & A'' & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ \alpha & \beta & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

1680.

(1894, p. 5*.)

On considère un faisceau de coniques passant par quatre points fixes :

1° *Lieu des points de contact des tangentes menées à chacune d'elles par un point pris sur l'un des côtés du quadrilatère.*

2° *Lieu des points de rencontre des tangentes menées à chacune des coniques du faisceau par deux points pris sur l'une d'entre elles.* André Cazamian.

Solution
Par un Abonné.

1° Le lieu des points de contact des tangentes menées d'un point fixe à un faisceau de coniques est une cubique. Cette cubique passe par les points de base du faisceau; pour ces points la tangente à la cubique passe par le point fixe; elle passe aussi par les trois points diagonaux du quadrangle des quatre points, pour lesquels la tangente passe par le point de concours des polaires du point fixe par rapport aux coniques du faisceau. Enfin elle passe au point fixe. C'est le mode de génération classique des cubiques, dû à Maclaurin. Si le point fixe est sur l'un des côtés du quadrangle, elle se décompose en ce côté et une conique.

2° Faisons une transformation homographique telle que les deux points d'où partent les tangentes deviennent les points

cycliques. Le problème sera ramené à trouver le lieu des foyers des coniques qui passent par quatre points d'un cercle. Ce lieu se compose de deux cubiques (*Nouv. Ann.*, 1889, p. 98). Lorsque les deux points ne sont pas sur une conique du faisceau, le lieu est une sextique.

(*Voir* Kœhler, *Ex. de Géom. analyt. et de Géom. supér.*, t. I, p. 329.)

1704bis.

(1915, p. 288.)

Démontrer que, si un triangle se déplace en restant inscrit à une conique et circonscrit à une autre conique, le centre du cercle circonscrit décrit une conique. Examiner, en particulier, le cas où cette conique est un cercle ou un système de deux droites. M. Weill.

Solution

Par l'auteur.

La solution de cette question se tire aisément d'un principe que j'ai établi depuis fort longtemps, relatif aux polygones de Poncelet, auxquels j'ai consacré de nombreuses Notes.

Si l'on exprime les coordonnées d'un point d'une conique en fonction rationnelle d'un paramètre t, l'équation, de degré m par rapport à t, qui définit m sommets d'un polygone inscrit dans la conique, renferme, lorsque le polygone se déplace en restant circonscrit à une autre conique, un paramètre arbitraire λ; or, j'ai établi que ce paramètre λ entre *linéairement* dans les coefficients de l'équation.

D'après cela, considérons une ellipse; les coordonnées d'un de ses points sont données par les formules

$$x = a\,\frac{1-t^2}{1+t^2}, \qquad y = b\,\frac{2t}{1+t^2}.$$

L'équation

$$t^3+\lambda t^2+(x\lambda+\beta)t+\gamma\lambda+\delta=0,$$

où λ est un paramètre variable, α, β, γ, δ, des constantes, définit un triangle inscrit dans l'ellipse et circonscrit à une autre conique; appelons t', t'', t''' les racines de l'équation; les coordonnées du centre du cercle circonscrit au triangle

sont données par les formules, faciles à établir,

$$x = \frac{a^2 - b^2}{a} \frac{(1 - t't'')(1 - t't''')(1 - t''t''')}{(1 + t'^2)(1 + t''^2)(1 + t'''^2)},$$

$$y = \frac{b^2 - a^2}{b} \frac{(t' + t'' + t''')\Sigma t't'' - t't''t'''}{(1 + t'^2)(1 + t''^2)(1 + t'''^2)};$$

les valeurs de x et y renferment, au numérateur et au dénominateur, des polynomes du second degré en λ : le théorème est donc démontré. — J'ai démontré, de même, il y a fort longtemps, que le point de concours des médianes d'un triangle qui se déplace en restant inscrit dans une conique C et circonscrit à une conique C′, décrit une conique homothétique de C ; théorème qui n'est qu'un cas particulier d'un autre, très général, relatif à des courbes de degré m dont l'équation renferme un paramètre du degré p, théorème que j'ai établi dans le *Bulletin de la Société mathématique*.

1756.

(1897, p. 100.)

Diviser un cercle, de rayon donné, en trois parties équivalentes et inégales formées par des arcs de cercle.

EMINE.

SOLUTION

Par M. H. BROCARD.

Le problème est manifestement indéterminé, car il y a une infinité d'arcs de cercles de centres quelconques et de rayons convenables, détachant d'un cercle donné le tiers de sa surface. Il faudra ensuite diviser le restant en deux parties équivalentes, ce qui se fera aussi par une autre infinité d'arcs de cercles de centres quelconques et de rayons convenables.

Rien n'ayant été spécifié, l'énoncé est demeuré sans réponse.

Le choix des arcs à employer étant laissé au lecteur, je proposerai les variétés suivantes :

1° Deux arcs ayant même centre en un point A de la circonférence donnée ;

2° Deux cercles concentriques avec la circonférence donnée ;

3° Deux circonférences tangentes intérieurement en un même point de la circonférence donnée ;

4° Etc., etc.

Mais s'il est facile d'improviser des variantes, autre chose est de pouvoir affirmer qu'il soit possible de les résoudre ou même de les mettre en équation. Il me paraît donc inutile de poursuivre cette investigation, à moins de nouvelle indication précisant la question 1756.

1796.

(1898, p. 196.)

Lorsqu'un polygone convexe se déplace en restant inscrit à un cercle et circonscrit à un autre cercle, la somme des cosinus des angles reste constante. M. Weill.

Note
Par l'auteur.

La solution de cette question se trouve dans mon Mémoire sur les polygones inscrits à un cercle et circonscrits à un autre cercle (*Journal de Liouville*, 1878, p. 265-304).

1834.

(1900, p. 95, et 1915, p. 474.)

Étant données deux coniques S *et* S′, *trouver le lieu d'un point* P *tel qu'on puisse mener de ce point une tangente à* S *et une tangente à* S′ *perpendiculaires entre elles.*

Montrer que ce lieu est une courbe C_8 *du huitième ordre et du premier genre ayant les points cycliques pour points quadruples et huit points doubles à distance finie. On déterminera la position de ces derniers en montrant que ce sont les points communs à distance finie à trois courbes du quatrième ordre, dont on formera les équations. On établira que les foyers réels et imaginaires des deux coniques* S *et* S′ *et les points multiples de* C_8 *sont sur une même courbe* C_3 *du troisième ordre qui dégénère en une hyperbole équilatère et la droite de l'infini lorsque les deux coniques* S *et* S′ *sont concentriques. On donnera une définition géométrique de cette courbe* C_3. *Le lieu cherché* C_8 *est tangent en huit points à chacune des coniques données ; les seize points de contact sont sur une même courbe du quatrième ordre.*

Exprimer les coordonnées d'un point du lieu en fonction d'un paramètre.

Examiner les cas particuliers où l'une des coniques données se réduit à une parabole ou à un couple de droites.

J. Franel.

Deuxième Solution

Par M. R. Bouvaist.

Soient

$$au^2 + 2buv + cv^2 + duw + 2evw + fw^2 = S = 0,$$
$$a'u^2 + 2b'uv + c'v^2 + d'uw + 2e'vw + f'w^2 = S' = 0$$

les deux coniques données ; les équations aux coefficients angulaires des tangentes à ces coniques issues d'un point P seront de la forme

$$Am^2 + 2Bm + C = 0,$$
$$A'm^2 + 2B'm + C' = 0;$$

exprimer que le point P est un point du lieu cherché revient à écrire que les deux équations

$$Am^2 + 2Bm + C = 0,$$
$$C'm^2 - 2B'm + A' = 0$$

ont une racine commune, ce qui donne

$$(1) \qquad (AA' - CC')^2 + 4(BC' + AB')(CB' + A'B) = 0,$$

or

$$A = fx^2 - 2dx + a, \quad B = -(fxy - ex - dy + b), \quad C = fy^2 - 2ey + c,$$
$$A' = f'x^2 - 2d'x + a', \quad B' = -(f'xy - e'x - d'y + b'), \quad C' = f'y^2 - 2e'y + c'.$$

On vérifie aisément que les termes de plus haut degré sont $f^2f'^2(x' + y')^4$; il est d'ailleurs évident que les seuls points à l'infini du lieu sont les points cycliques.

Les trois courbes du quatrième ordre

$$AA' - CC' = 0,$$
$$BC' + AB' = 0,$$
$$BA' + CB' = 0$$

ont huit points communs à distance finie et la forme de l'équation (1) montre que ce sont des points doubles de la

courbe C_8, qui, ayant deux points quadruples et huit points doubles est de genre *un*.

Les foyers de S et S' sont déterminés par les équations

$$A - C = 0, \qquad A' - C' = 0,$$
$$B = 0, \qquad B' = 0;$$

ils sont sur la cubique circulaire

$$B'(A - C) - B(A' - C') = (BC' + AB') - (BA' + CB') = 0,$$

cubique circulaire qui est visiblement le lieu des foyers des coniques du faisceau $S + \lambda S' = 0$. On sait que cette cubique se décompose en une hyperbole équilatère et en la droite de l'infini, lorsque S et S' sont concentriques.

Soit P_1 le point d'incidence sur S d'une tangente commune à S' et à la développée de S ; P_1 est un point du lieu C_8, et comme le centre instantané de rotation de l'angle mobile P coïncide pour la position P_1 avec le contact de S' avec la normale à S en P_1, S et C_8 sont tangentes en P_1 et aux sept autres points analogues.

L'équation du lieu peut d'ailleurs s'écrire

$$(AA' - CC')^2 + 4[B^2 A'C' + BB'(AA' + CC') + B'^2 AC] = 0;$$

sous cette forme on voit que les deux coniques S et S' qui ont pour équations

$$B^2 - AC = 0, \qquad B'^2 - A'C' = 0$$

sont tangentes à la courbe C_8 et que les seize points de contact sont sur la quartique

$$AA' + CC' + 2BB' = 0,$$

qui est le lieu des points tels que les deux tangentes à S menées par l'un d'eux forment un faisceau harmonique avec les perpendiculaires aux tangentes menées à S' par ce même point.

Pour exprimer les coordonnées d'un point de C_8 en fonction d'un paramètre, il nous faudra, suivant la méthode générale, déterminer l'équation des courbes C_6 du sixième ordre passant par les points doubles de C_8, admettant les points cycliques comme points triples et passant par cinq points donnés de C_8.

L'équation

$$C_6 = f_1(AA' - CC') + f_2(BC' + AB') + f_3(BA' + CB') = 0,$$

où f_1, f_2, f_3 représentent les premiers membres des équations générales de trois coniques, renfermant dix-sept paramètres, est l'équation générale des sextiques circulaires passant par les points doubles de C_8.

En supposant que S et S' soient respectivement tangentes à Oy et Ox, ce qui nous donnera les conditions

$$a = c' = 0,$$

nous mettrons en évidence quatre points de C_8, les points d'intersections des quatre droites

$$A = x(fx - 2d) = 0, \qquad C' = y(f'y - 2e') = 0;$$

en écrivant que C_6 passe par ces quatre points, est tangente à l'origine à C_8 et admet les points cycliques comme points triples, son équation deviendra de la forme

$$\lambda_1 \varphi_1(x, y) + \lambda_2 \varphi_2(x, y) + \lambda_3 \varphi_3(x, y) = 0,$$

et le problème s'achèvera suivant la méthode classique. Ce calcul ne semblant présenter aucun intérêt particulier, nous ne le ferons pas.

Si l'une des coniques données devient une parabole, S par exemple, nous aurons $f = 0$ et le degré de C_8 s'abaissera de deux unités.

Les termes de plus haut degré seront

$$4f'^2(x' + y')^2(ex + dy)^2,$$

la courbe sera dans ce cas une sextique bicirculaire admettant la direction de l'axe de la parabole S comme direction asymptotique double, la courbe étant en ce point tangente à la droite de l'infini, et le nombre des points doubles à distance finie s'abaisse à sept.

Enfin si S et S' sont toutes deux des paraboles, le lieu est une quartique circulaire admettant les axes de ces deux courbes comme directions asymptotiques. Si l'une S par exemple se

réduit à deux points, A et B, le lieu est évidemment l'ensemble des deux podaires de S' par rapport à chacun de ces points.

Autres solutions. par M. M.-F. EGAN et M. PICARDAT.

1842.

(1900, p. 190.)

Sur la diagonale extérieure d'un quadrilatère inscrit, les intersections de cette diagonale avec les diagonales intérieures, les intersections des côtés opposés, les points où passent les perpendiculaires menées aux diagonales intérieures par l'orthocentre du triangle ayant pour sommets les extrémités de la diagonale extérieure et le croisement des diagonales intérieures, sont six points en involution. C. BLANC.

SOLUTION

Par UN ABONNÉ.

Soient A, B, C, D les sommets du quadrilatère ; E et F les points de concours des côtés opposés ; M, N, P les sommets du triangle diagonal du quadrilatère ; H l'orthocentre du triangle MEF.

Les deux hauteurs HE et HF et les perpendiculaires abaissées de H sur AC, BD forment un faisceau harmonique, car elles sont perpendiculaires aux rayons du faisceau (M.ENFP) qui est harmonique. Donc les deux perpendiculaires coupent EF en deux points conjugués harmoniques par rapport aux points E et F. Comme il en est de même pour les points N et P, les six points considérés sont bien en involution. Le théorème est vrai pour un quadrilatère quelconque.

1872 (1).

(1900, p. 432.)

Par l'inversion quadrique définie avec le pôle O *et le cercle-point* V *(conique des points unis), un cercle ayant le centre* V *et qui ne passe pas par* O *est transformé en une quartique rationnelle circulaire à point tacnodal, qui est ligne d'ombre d'un hélicoïde gauche. Construire les intersections de la courbe avec une droite ; les tangentes*

(1) Numérotée 1860 par erreur.

au point double (qui est aussi un foyer quadruple de la courbe), la tangente en un point quelconque et les deux tangentes doubles. V. RETALI.

SOLUTION

Par UN ABONNÉ.

Le cercle-point V se confond avec les deux droites isotropes issues de ce point et par suite la courbe à étudier est définie géométriquement de la façon suivante : « On donne un cercle de centre V et de rayon A et un point O de son plan ; par O on mène une sécante qui rencontre le cercle en P ; le point P′, situé sur cette sécante, et tel que l'angle PVP′ soit droit, décrit la courbe en question. » Dans ce mode de génération on reconnaît la courbe appelée « capricorne ». (*Voir* GOMÈS TEIXEIRA, *Courbes spéciales remarquables*, t. II, p. 319-320, 386-388 ; PONCELET, *Applications d'Analyse et de Géométrie*, t. I, p. 450.)

Elle a un point tacnodal au centre du cercle V et un point double en O. Elle affecte des formes différentes suivant que le point O est à l'intérieur ou à l'extérieur du cercle V. Elle dégénère en une strophoïde quand il est sur le cercle et en un cappa quand il est à l'infini. (*Voir* PONCELET, *loc. cit.*)

Prenons comme axe des x la droite VO et comme axe des y la perpendiculaire Vy. Désignons par h la longueur VO et soient x, y les coordonnées du point P ; X, Y celles de P′.

Les équations des droites OP et VP′ étant

$$(1) \qquad Xy + Y(h - x) - hy = 0,$$

$$(2) \qquad Xx + Yy = 0,$$

on en déduit

$$(3) \qquad X = \frac{hy^2}{x^2 + y^2 - hx}, \qquad Y = \frac{-hxy}{x^2 + y^2 - hx};$$

et, puisque les relations (1) et (2) sont symétriques en x, y, X, Y, on a aussi

$$(4) \qquad x = \frac{hY^2}{X^2 + Y^2 - hX}, \qquad y = \frac{-hXY}{X^2 + Y^2 - hX}.$$

Par suite au cercle V

$$x^2 + y^2 - a^2 = 0$$

correspond la courbe

$$(5)\qquad h^2 Y^2(X^2+Y^2) - a^2(X^2+Y^2-hX)^2 = 0.$$

On trouve dans Poncelet une construction de la tangente basée sur la méthode de Roberval. En voici une différente obtenue au moyen du théorème de Frégier, appliqué à l'angle droit PVP', en observant que O est le point de Frégier correspondant.

La normale en V à l'axe Vx, la tangente en P au cercle V et la tangente cherchée en P' à (5) coupent les côtés opposés du triangle PVP' en trois points situés sur une droite ; ce qui suffit à déterminer la tangente en P'.

Les tangentes au point double O sont les droites qui joignent ce point aux intersections du cercle V avec Oy.

Pour trouver les tangentes doubles de (5), appliquons les formules de transformation (3) à la droite

$$(6)\qquad uX + vY - 1 = 0$$

et à la courbe (5). Nous obtenons ainsi la conique qui a pour équation

$$(7)\qquad hy(uy - vx) - (x^2 + y^2 - hx) = 0,$$

et le cercle V. Si la droite (6) et la courbe (5) sont bitangentes, il en est de même du cercle V et de la conique (7) et réciproquement. Or la conique (7) est déterminée. Elle passe en effet par les points V et O ; au point V elle a Vy pour tangente ; au point O elle a pour tangente la droite qui joint ce point au point de rencontre de Vy avec (6). Enfin elle passe par le point d'intersection du cercle décrit sur VO comme diamètre avec la perpendiculaire abaissée de V sur (6).

Le problème de la détermination des tangentes doubles de la courbe (5) et de ses points d'intersection avec une droite de son plan se présente donc comme très analogue à celui qui a été résolu dans la question 1871 et il paraît inutile d'insister davantage.

L'INSTITUT MITTAG-LEFFLER.

Par un testament du 16 mars 1916, M. et Mme Mittag-Leffler ont légué tous leurs biens à une fondation qui prendra le nom d'*Institut mathématique des époux Mittag-Leffler*.

Cet Institut a pour objet essentiel la conservation et le développement de la culture des Mathématiques pures dans les quatre pays scandinaves : Suède, Danemark, Finlande et Norvège.

Il s'acquittera de sa tâche :

Par l'entretien et l'enrichissement de la bibliothèque mathématique qui appartient aux testateurs, et se trouve, à Djursholm, dans une villa édifiée et aménagée dans ce but;

Par des bourses accordées, à des étudiants en Mathématiques des deux sexes, appartenant aux pays mentionnés ci-dessus, pour la poursuite de leurs études, dans leur pays ou à l'étranger;

Par l'attribution de prix décernés à des lauréats de toutes nationalités, pour récompenser de véritables *découvertes*. On exprime l'espoir qu'un prix pourra être décerné une fois au moins tous les six ans.

Tous les six ans aussi, l'Institut célébrera sa séance solennelle.

Suivent quelques dispositions d'ordre administratif sur lesquelles nous n'avons pas à insister ici. Par

contre, il faut signaler le soin constant qu'ont eu les testateurs d'affirmer leur sollicitude pour les Mathématiques PURES.

« Notre testament, disent-ils enfin, doit son origine » à la vivante conviction qu'un peuple qui n'accorde » pas aux Mathématiques un rang élevé dans son » estime ne sera jamais en état de remplir les plus » hautes tâches civilisatrices. »

Notons aussi l'hommage rendu par M. Mittag-Leffler à l'Institut Pasteur, de Paris, qui, déclare-t-il, a été pour lui un modèle.

Les mathématiciens accueilleront avec reconnaissance la manifestation par laquelle le célèbre professeur de Stockholm a marqué son 70ᵉ anniversaire, et à laquelle s'est associée la compagne de sa vie.

Beaucoup regretteront doublement l'ajournement forcé du *Congrès international des mathématiciens*, qui devait précisément cette année tenir à Stockholm sa 6ᵉ Session.

LA RÉDACTION.

[I19c][I23a]

SUR UN THÉORÈME DE M. AXEL THUE;

PAR M. EDMOND MAILLET.

Un important Mémoire de M. Axel Thue, paru dans le Tome 135 (1909) du *Journal für Mathematik* (Crelle), p. 284-305, me donne occasion à quelques réflexions;

je ne m'occuperai que des théorèmes I, II et IV, laissant de côté le théorème III.

I. L'auteur s'occupe principalement d'établir le théorème suivant (théorème I) :

Soit ρ une racine positive d'un polynome entier de degré r à coefficients entiers ; la relation

$$(1) \qquad 0 < | q\rho - p | < \frac{c}{q^{\frac{r}{2}+k}},$$

où c et k sont deux quantités positives quelconques > 0, n'a qu'un nombre limité de solutions en entiers positifs p et q.

Or il m'a semblé que, dès le début [p. 286, équation (6)], l'auteur faisait *implicitement* la restriction que le polynome $F(x)$, de degré r, à coefficients entiers, dont ρ est racine, et qu'on peut évidemment supposer irréductible pour la démonstration du théorème I, avait pour coefficient de son terme en x^r l'unité, c'est-à-dire que ρ était un nombre entier algébrique ([1]). Il s'ensuivrait donc à première vue une restriction importante des conclusions de M. A. Thue, c'est-à-dire des théorèmes I, II et IV dont je m'occupe ici.

Heureusement, du fait que les racines ρ_1 d'une équation algébrique

$$\alpha_0 x^r + \alpha_1 x^{r-1} + \ldots + \alpha_r = 0 \qquad (\alpha_0 > 0),$$

à coefficients entiers, sont de la forme $\rho_1 = \frac{\rho}{\alpha_0}$, où ρ,

([1]) De toutes façons, ce qui suit montre qu'il suffit d'établir les théorèmes I, II de M. Thue en supposant ρ entier algébrique, et que ces théorèmes s'étendent ensuite facilement au cas où ρ est un nombre algébrique quelconque.

racine de

$$\rho^r + \alpha_1 \rho^{r-1} + \alpha_2 \alpha_0 \rho^{r-2} + \ldots + \alpha_r \alpha_0^{r-1} = 0,$$

est un entier algébrique, les théorèmes I et II de M. Thue s'étendent immédiatement à ρ_1, si on ne les suppose établis que pour ρ.

II. Envisageons en effet le théorème I, supposé inexact en ce qui concerne ρ_1; on pourrait écrire, pour une infinité de valeurs entières de p et q,

$$|q\rho_1 - p| < \frac{c}{q^{\frac{r}{2}+k}},$$

et

$$|q\rho - p\alpha_0| < \frac{c\alpha_0}{q^{\frac{r}{2}+k}} = \frac{c_1}{q^{\frac{r}{2}+k}} \qquad (c_1 \text{ analogue à } c),$$

ce qui est en contradiction avec (1); (1) et le théorème I subsistent donc pour ρ_1.

Passons au théorème II : *soit le développement en fraction continue ordinaire de* ρ_1 :

$$\rho_1 = a_0 + 1 : a_1 + \ldots + 1 : a_n + \ldots,$$

où les a_i *sont des entiers positifs, tous* > 0 *sauf l'entier* a_0 *qui peut être nul*, *et*

$$\frac{P_n}{Q_n} = a_0 + 1 : a_1 + \ldots + 1 : a_{n-1}.$$

Supposant le théorème II établi pour ρ, je vais le démontrer pour ρ_1, c'est-à-dire faire voir que l'inégalité

$$a_n > Q_n^{k+\frac{r}{2}-1},$$

où k est un nombre positif arbitraire donné quelconque > 0, n'est possible que pour des valeurs limitées de n.

En effet, en admettant le contraire, on aurait pour une infinité de valeurs de n, avec les notations de M. Thue pour les fractions continues,

$$Q_{n+1} = Q_n a_n + Q_{n-1},$$

$$\left| \rho_1 - \frac{P_n}{Q_n} \right| < \frac{1}{Q_n Q_{n+1}} < \frac{1}{a_n Q_n^2},$$

$$| Q_n \rho_1 - P_n | < \frac{1}{a_n Q_n} < Q_n^{-\left(\frac{r}{2}+k\right)},$$

contrairement au théorème I [1].

III. Le théorème IV de M. Thue étant une application du théorème I, dont nous venons de vérifier entièrement l'exactitude, n'a pas besoin d'être complété. Je rappelle son énoncé :

L'équation $U(p, q) = c$, *où* c *est une constante donnée, et* U *un polynome entier homogène et irréductible à coefficients entiers, n'a qu'un nombre fini de solutions en entiers positifs* p *et* q, *quand le degré de* U *est* > 2.

Il est susceptible de sérieuses extensions basées sur la méthode employée par M. Thue, méthode dont le principe était déjà connu de Lagrange et de J. Liouville et qui a été plusieurs fois utilisé [2]. Nous allons le montrer.

Soit l'équation de degré r, irréductible (c'est-à-dire de premier membre indécomposable en un produit

---

[1] Cette démonstration simple est vraisemblablement celle de M. Thue qui indique, sans plus de détails, le théorème II comme conséquence immédiate du théorème I.

[2] *Voir* par exemple mon Mémoire du *Journal de Mathématiques* (Jordan), 5e série, t. VI, p. 265.

de facteurs de même forme)

$$(2)\quad \varphi_r(x, y) - [\varphi_s(x, y) + \varphi_{s-1}(x, y) + \ldots + \varphi_0] = 0,$$

où $r > s$ et où φ_i est un polynome homogène et de degré i en x, y, φ_r ayant ses coefficients entiers. Soit encore $x = p$, $y = q$ une solution en nombres entiers; on peut toujours supposer p, q positifs, à condition de substituer au besoin à (2) l'équation qu'on en déduit en y changeant soit x en $-x$, soit y en $-y$, soit à la fois x et y en $-x$ et $-y$. Admettant que φ_r contienne effectivement des termes en x^r et y^r, on écrira, si $p < q$, $\beta_1, \ldots, \beta_n$ étant distincts et $\neq 0$,

$$(3)\quad \varphi_r(x, y) = A(x - \beta_1 y)^{a_1} \ldots (x - \beta_n y)^{a_n}, \quad a_1 + \ldots + a_n = r,$$

et si $p > q$,

$$\varphi_r(x, y) = B\left(y - \frac{x}{\beta_1}\right)^{a_1} \cdots \left(y - \frac{x}{\beta_n}\right)^{a_n}.$$

Ce dernier cas où $p > q$ se traite d'ailleurs absolument comme le premier où $p < q$: il suffit d'intervertir le rôle de x et y, de p et q. Soit donc $p < q$; d'après (2) et (3), on a

$$(4)\quad \begin{aligned} \varphi_r(p, q) &= A(p - \beta_1 q)^{a_1} \ldots (p - \beta_n q)^{a_n} \\ &= q^s \varphi_s\left(\frac{p}{q}, 1\right) + \ldots + \varphi_0 = \lambda q^s, \end{aligned}$$

où $|\lambda|$ est une quantité limitée supérieurement en fonction des coefficients de $\varphi_s, \varphi_{s-1}, \ldots, \varphi_0$; par suite,

$$A\left(\frac{p}{q} - \beta_1\right)^{a_1} \cdots \left(\frac{p}{q} - \beta_n\right)^{a_n} = \lambda q^{s-r};$$

si q est assez grand, un des facteurs du premier membre autres que A a son module arbitrairement petit; ce sera

par exemple [1] $\left(\frac{p}{q} - \beta_1\right)^{a_1}$; on en conclut d'abord que β_1 est réel ; ensuite, puisque

$$\frac{p}{q} - \beta_i = \beta_1 - \beta_i + \frac{p}{q} - \beta_1$$

diffère arbitrairement peu de $\beta_1 - \beta_i$, qui est $\neq 0$,

$$(4\ bis) \quad \left(\frac{p}{q} - \beta_1\right)^{a_1} = \lambda_1 q^{s-r}, \qquad |p - \beta_1 q| = \lambda_2 q^{\frac{s-r}{a_1}+1},$$

où λ_1, λ_2 sont analogues à λ; si la racine β_1 ou le facteur $x - \beta_1 y$ appartient à un facteur irréductible de degré δ de $\varphi_r(x, y)$, on a

$$(5) \qquad \delta a_1 \leqq r,$$

et, d'après le théorème I de M. Thue,

$$|p - \beta_1 q| \geqq c\, q^{-\left(\frac{\delta}{2}+k\right)};$$

il faudra donc, c étant arbitraire,

$$(6) \quad \frac{r-s}{a_1} \leqq \frac{\delta}{2} + k + 1, \qquad s \geqq r - a_1\frac{\delta}{2} - a_1 k - a_1;$$

on a une condition de même nature pour chacune des racines β_i réelles ; dans le cas où $\varphi_r(x, y)$ est irréductible, $a_1 = 1$, $\delta = r$, et

$$(6\ bis) \qquad s \geqq \frac{r}{2} - k - 1,$$

c'est-à-dire

$$(6\ ter) \quad \begin{cases} s \geqq r_1 - 1, & \text{si} \quad r = 2r_1, \\ s \geqq r_1, & \text{si} \quad r = 2r_1 + 1. \end{cases}$$

---

[1] Ce facteur sera $\neq 0$, car la droite $x = \beta_1 y$ ne coupe la courbe (2) qu'en un nombre fini de points quand β_1 est rationnel, puisque (2) est irréductible.

Nous en concluons le théorème suivant :

THÉORÈME A. — *L'équation indéterminée* (2), *où* $\varphi_r(x, y)$ *contient un terme en* x^r *et un en* y^r, *ne peut admettre une infinité de solutions en nombres entiers* x, y *que si* s *satisfait aux conditions* (6), *et même, quand* $\varphi_r(x, y)$ *est irréductible, à la condition* (6 *ter*).

Il est assez remarquable que ce théorème ne suppose aucunement entiers ni rationnels les coefficients de φ_s, φ_{s-1}, ..., φ_0 (1). Quand on prend $s = 0$ et $\varphi_r(x, y)$ irréductible, on retrouve le théorème IV de M. Thue.

Le théorème IV de M. Thue peut, grâce à des transformations convenables, conduire à montrer l'impossibilité d'une infinité de solutions pour des équations auxquelles il ne s'applique pas directement. L'auteur en a donné divers exemples simples (2) : pour $n > 2$, les équations

$$x^2 + (x + k)^n = y^n, \qquad x^2 - h^2 = ky^n,$$
$$(x + h)^3 + x^3 = ky^n, \qquad (x + h)^4 - x^4 = ky^n,$$

avec n, h, k entiers donnés, n'ont chacune qu'un nombre fini de solutions en entiers x, y ; on vérifie en effet que, dans le cas contraire, une certaine équation de la forme $aX^n + bY^n = c$, où $|a|$, $|b|$, $|c|$ sont des entiers limités, et à laquelle s'applique le théorème IV

(1) On voit facilement, il est vrai, qu'une équation indéterminée irréductible en x et y ne peut avoir une infinité de solutions en nombres entiers sans avoir ses coefficients rationnels. Il est donc loisible de supposer *a priori* tous les coefficients entiers dans la formule (2). D'après la même méthode, le théorème A comporte certaines extensions au cas où φ_r a un facteur de la forme $x^{\alpha_1} y^{\alpha_2}$.

(2) *Mémoires de la Société des Sciences de Christiania*, 1908, 1re note, p. 33.

de M. Thue, devrait avoir une infinité de solutions en entiers X et Y.

Les méthodes de M. Thue ne donnent malheureusement pas en général de procédé très pratique pour l'évaluation d'une limite supérieure des valeurs absolues des solutions en entiers p, q.

Mentionnons en terminant que, au point de vue des applications, le théorème A précédent est à rapprocher d'un théorème de M. Runge [1] qui, souvent, ne fait pas double emploi avec lui.

Remarque. — Si l'on pouvait établir pour les quantités $|p - \beta_i q|$ (β_i réel), quand q est assez grand, une limite inférieure cq^{-h} plus avantageuse que celle qui résulte du théorème I de M. Thue, la formule (4 *bis*) donnerait lieu à un théorème corrélatif analogue au théorème A, mais plus avantageux.

[L¹6a]

SUR LA DÉTERMINATION DU CENTRE DE COURBURE EN UN POINT D'UNE CONIQUE ;

PAR M. R. BOUVAIST.

On trouve dans les numéros de septembre, octobre et novembre 1915 des *Nouvelles Annales*, sous la rubrique « Questions proposées », un certain nombre

(1) *Journal für Mathematik* (Crelle), t. 100, p. 434. Pour des cas étendus plus particuliers on pourra se reporter à mon Mémoire du *Journal de Mathématiques* (Jordan), 5e série, t. VI, 1900, p. 261, où les résultats sont obtenus plus simplement que dans le travail de M. Runge.

de constructions géométriques du centre de courbure en un point d'une conique, je voudrais indiquer dans les quelques lignes qui vont suivre deux constructions très générales, dont il est facile de tirer comme cas particuliers les constructions mentionnées plus haut.

Première construction. — Soit une conique Σ tangente à une droite Δ en un point O; soient A et B deux points fixes, M un point variable de Σ, les droites MA et MB coupent Δ en α et β; quand M varie, les points α, β engendrent une division homographique dont les deux points doubles sont confondus au point O. Soient α' et β' deux points correspondants de cette homographie; $M\alpha'$, $M\beta'$ coupent respectivement OA et OB en A' et B' et la droite $A'B'$ passera par un point fixe, intersection de AB et de OM. Il en résulte que la conique Σ' engendrée par les rayons homographiques $A'\alpha'$, $B'\beta'$, qui sera tangente à Δ en O, n'aura qu'un seul point commun avec Σ en dehors de O, elle sera donc osculatrice à Σ en O.

D'où la proposition suivante :

Étant données sur une droite Δ *une homographie ayant ses points doubles confondus en un point* O *et deux droites* Ox *et* Oy, *si l'on prend sur ces deux droites deux points* A *et* B, *toutes les coniques engendrées par les faisceaux homographiques obtenus en joignant* A *et* B *à deux points correspondants de l'homographie donnée sur la droite* Δ *seront osculatrices en* O, *quelle que soit la position des points* A *et* B *sur* Ox *et* Oy.

Soit Σ l'une de ces coniques, la parallèle à Δ menée par B coupe Σ en B_1; la droite AB_1 coupe Δ en I, qui est un point de l'homographie ayant son correspon-

dant à l'infini. Si Σ est un cercle, B_1 sera sur la symétrique Oy' de Oy par rapport à la perpendiculaire Δ_1 à Δ en O et l'on aura $IB_1 . IA = \overline{IO}^2$. Le point A sera donc à l'intersection de Ox avec le cercle inverse (I) de Oy' par rapport à I, la puissance d'inversion étant $\overline{IO}^2$. Le point de (I) diamétralement opposé à O sera l'intersection K de la perpendiculaire à Δ en I avec la perpendiculaire OK à Oy en O, et le cercle Σ coupera Δ_1 au point L d'intersection de cette droite avec la perpendiculaire abaissée de K sur Ox.

Or si nous considérons les points K_1 et K_2 d'intersection des perpendiculaires à Δ en deux points correspondants de l'homographie avec les perpendiculaires OK_1 et OK_2 à Oy et Ox en O, la droite K_1K_2 passera par un point fixe sur Δ_1, point fixe qui n'est autre que le point L, puisque KL est une des positions particulières de K_1K_2.

D'où la proposition suivante :

Soient Σ *une conique tangente à la droite* Δ *en* O ; *soient* A, M, B *trois points de cette conique;* MA *et* MB *coupent* Δ *en* α *et* β, *les perpendiculaires* OK_1 *et* OK_2 *à* OB *et* OA *coupent les perpendiculaires* αK_1, βK_2 *à* Δ *en* K_1 *et* K_2, *la droite* K_1K_2 *coupe la normale en* O *à* Σ *au point* L, OL *est le diamètre du cercle osculateur à* Σ *en* O.

Cette construction est due à P. Serret, qui l'a démontrée analytiquement dans sa Géométrie de direction.

Exemples. — 1° *La tangente en un point* O *d'une hyperbole de centre* ω *coupe les asymptotes en* α *et* β, *la perpendiculaire en* α *à* $\alpha\beta$ *coupe la perpendicu-*

laire abaissée de O *sur* $\omega\beta$ *en* K, *la perpendiculaire abaissée de* K *sur* $\omega\alpha$ *coupe la normale* OL *en* L, OL *est le diamètre du cercle osculateur en* O.

2° Questions proposées : **2257, 2271, 2277, 2279.**

Deuxième construction. — Nous pouvons énoncer la proposition suivante, corrélative d'une proposition démontrée plus haut :

Soient sur une droite Δ *trois points* A, O, B, *par* A *et* B *on mène deux droites quelconques* MA *et* MB, *on considère un faisceau homographique de sommet* O, *admettant pour rayons doubles confondus la droite* Δ; *deux rayons correspondants* $O\alpha$ *et* $O\beta$ *rencontrent* MA *en* α, MB *en* β; *la droite* $\alpha\beta$ *enveloppe une conique* Σ, *toutes les coniques* Σ *obtenues en faisant varier le point* M *sont osculatrices en* O.

La perpendiculaire en O à $O\alpha$ rencontre la perpendiculaire en B à Δ en α_1, la perpendiculaire en O à $O\beta$ rencontre la perpendiculaire en A à Δ en β_1, la droite $\alpha_1\beta_1$ passe par un point fixe K de la perpendiculaire à Δ en O.

Supposons que la conique Σ soit un cercle de centre ω la symétrique de la tangente AM par rapport à $O\omega$ rencontre AB en A′, BM en C. Les rayons OC, $O\omega$ se correspondent dans l'homographie considérée; par suite, si la perpendiculaire en O à OC rencontre la perpendiculaire à Δ en A en β_1, la droite $B\beta_1$ coupera $O\omega$ au point K.

La polaire de C par rapport au cercle Σ rencontre Δ en I, la division (BIA′O) est harmonique et la perpendiculaire abaissée de ω sur CO passe par I. Nous avons

$$\frac{A\beta_1}{O\omega} = \frac{OA}{OI}, \qquad \frac{A\beta_1}{KO} = \frac{AB}{OB};$$

d'où

$$\frac{KO}{\omega O} = \frac{OA.OB}{OI.AB};$$

or, puisqu'on a

$$\frac{2}{OI} = \frac{1}{OA} + \frac{1}{OB},$$

il vient

$$KO = \frac{O\omega}{2},$$

d'où la proposition suivante :

Soit une conique Σ *inscrite dans un triangle* MAB *et touchant* AB *en* O, *une tangente quelconque à* Σ *rencontre* MA *en* α, MB *en* β, *les perpendiculaires à* AB *en* A *et* B *sont rencontrées respectivement en* β_1 *et* α_1 *par les perpendiculaires en* O *à* $O\beta$ *et* $O\alpha$, *la droite* $\alpha_1\beta_1$ *coupe la normale en* O *en un point* K, OK *est égal à la moitié du rayon de courbure de* Σ *en* O.

Exemples. — 1° *Soit une hyperbole de centre* ω, *la tangente en un point* O *de la courbe coupe les asymptotes en* α *et* β; *soient* K_1 *le point d'intersection de la perpendiculaire en* O *à* $O\omega$ *avec la perpendiculaire en* α *à* $O\alpha$, K_2 *le point d'intersection de la perpendiculaire abaissée de* O *sur* $\omega\beta$ *avec la perpendiculaire en* β *à* $O\beta$. K_1K_2 *coupe la normale en* O *en* K, OK *est égal à la moitié du rayon de courbure en* O.

2° Questions proposées : 2267, 2271.

Troisième construction. — Je vais indiquer pour terminer une troisième construction qui, tout en étant d'une application moins fréquente que les deux précédentes, fournit une construction très simple du point de contact d'une quasi-normale avec son enveloppe.

THÉORÈME. — *Soient* A *un point d'une conique,* A′ *le second point d'intersection de cette courbe avec la normale en* A, μ *le milieu de* AA′, F *le point de Frégier relatif au point* A, *c le centre de courbure en* A; *c est le conjugué harmonique de* μ *par rapport à* A *et* F.

Soient en effet AT la tangente en A, AB la seconde corde commune à la conique et au cercle osculateur à celle-ci en A, AB′ la perpendiculaire à AB en A. BB′ coupe la normale AA′ au point F. La polaire de F par rapport à la conique, qui est la seconde corde commune à cette conique et au cercle de rayon nul de centre A, est parallèle à AB; les deux droites AA′ et AB′ étant également inclinées sur les axes de la conique, la corde A′B′ est parallèle à AB. Si donc M est le milieu de AB, P l'intersection de AB′ et de BA′, les trois points M, F, P seront sur un même diamètre de la conique. Par suite Mμ passera par le milieu de AP, ce qui montre que c étant l'intersection de AA′ avec la perpendiculaire à AB en M, le faisceau M(AμFc) est harmonique.

REMARQUES. — 1° Ce théorème, joint au théorème de Pascal, fournit une construction assez simple du centre de courbure en un point d'une conique donnée par cinq de ses points.

2° Soient M un point variable d'une conique Σ, α et β deux points fixes de son plan; prenons la conjuguée harmonique de la tangente MT à Σ par rapport à Mα, Mβ, cette droite est la quasi-normale en M. Elle rencontre $\alpha\beta$ en γ, Σ en M′; soit γ' le conjugué harmonique de γ par rapport à MM′. Soit F le pôle de la corde $\alpha'\beta'$, α' et β' étant les intersections de Σ avec Mα, Mβ. D'après la proposition précédente, Mγ touchera

son enveloppe au conjugué harmonique de γ' par rapport à M et F.

3° Considérons une quadrique Σ, soit M un de ses points; soient F le point de Fregier relatif au point M, M' le second point d'intersection de la normale en M avec Σ, si l'on désigne par ρ_1 et ρ_2 les rayons de courbure principaux en M, on voit facilement que l'on a la relation

$$\frac{2}{\text{MF}} - \frac{2}{\text{MM}'} = \frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_2}.$$

[I19a]

SUR QUELQUES ÉQUATIONS QUADRATIQUES;

Par M. Mathieu WEILL.

I. Cherchons une solution en nombres entiers de l'équation

$$x^2 + y^2 = mz^2$$

(x et y devant être premiers entre eux).

Si m est un nombre premier de la forme $4p+3$, ou un produit de facteurs premiers dont un, au moins, est de cette forme, l'équation est impossible; car on sait que tout nombre qui divise une somme de deux carrés premiers entre eux est, lui-même, une somme de deux carrés, et un nombre premier de la forme $4p+3$ n'est pas une somme de deux carrés.

Soit donc m un nombre premier de la forme $4p+1$, on aura

$$m = a^2 + b^2,$$

et l'équation

$$x^2 + y^2 = (a^2 + b^2) z^2$$

admet la solution

$$x = a, \qquad y = b, \qquad z = 1.$$

Pour avoir d'autres solutions, posons

$$x = a + \lambda\delta,$$
$$y = b + \lambda'\delta,$$
$$z = 1 + \delta,$$

d'où

$$\delta = \frac{2(a^2 + b^2) - 2a\lambda - 2b\lambda'}{\lambda^2 + \lambda'^2 - a^2 - b^2},$$

$$z = (a - \lambda)^2 + (b - \lambda')^2 = u^2 + v^2,$$
$$z^2 = (u^2 + v^2)^2 = (u^2 - v^2)^2 + (2uv)^2 = K^2 + L^2,$$
$$x^2 + y^2 = (a^2 + b^2) z^2 = (aK + bL)^2 + (aL - bK)^2;$$
$$x = aK + bL = a(u^2 - v^2) + 2buv,$$
$$y = aL - bL = a.2uv - b(u^2 - v^2),$$
$$z = u^2 + v^2.$$

Soit, par exemple,

$$x^2 + y^2 = 5z^2, \qquad a = 1, \qquad b = 2;$$
$$x = u^2 - v^2 + 4uv,$$
$$y = 2uv - 2(u^2 - v^2),$$
$$z = u^2 + v^2.$$

II. Si m est un produit de facteur premiers, tous de la forme $4p + 1$, on aura m sous la forme d'un produit de nombres dont chacun est une somme de deux carrés, le produit est donc, de plusieurs manières, une somme de deux carrés, ce qui donne plusieurs groupes de solutions.

Soit

$$m = 13.17 = (3^2 + 2^2)(4^2 + 1^2)$$
$$= (14^2 + 5^2)$$
$$= (10^2 + 11^2),$$

d'où

$$x^2 + y^2 = (14^2 + 5^2) z^2,$$
$$x^2 + y^2 = (10^2 + 11^2) z^2,$$

ce qui donne deux groupes de solutions.

III. Soit l'équation

$$ax^2 + by^2 = (a + b) z^2,$$

elle admet la solution

$$x = 1,$$
$$y = 1,$$
$$z = 1,$$

d'où, en posant

$$x = 1 + \lambda\delta,$$
$$y = 1 + \lambda'\delta,$$
$$z = 1 + \delta,$$

$$x = -a(\lambda - 1)^2 + b\lambda'^2 - 2b\lambda\lambda' - b + 2\lambda b,$$
$$y = -b(\lambda' - 1)^2 + a\lambda^2 - 2a\lambda\lambda' - a + 2\lambda' a,$$
$$z = \quad a(\lambda - 1)^2 + b(\lambda' - 1)^2.$$

On peut, plus généralement, considérer l'équation

$$ax^2 + by^2 = (a + m^2 b) z^2$$

qui admet la solution

$$x = 1,$$
$$y = m,$$
$$z = 1,$$

et l'on trouve ensuite, comme précédemment, les valeurs générales de x, y, z.

IV. Soit

$$ax^2 + by^2 = z^2.$$

Si $a + b$ est un carré m^2, on a comme solution

$$x = 1, \qquad y = 1, \qquad z = m;$$

on a ensuite la solution générale.

Soit

$$ax^2 + aby^2 = z^2$$

si a est un carré m^2, on posera

$$z = mz',$$

d'où

$$x^2 + by^2 = z'^2,$$

d'où

$$x = \lambda^2 - b\lambda'^2,$$
$$y = 2\lambda\lambda',$$
$$z = m(\lambda^2 + b\lambda'^2).$$

Soit

$$ax^2 + by^2 = z^2;$$

posons

$$x = \alpha + b\beta,$$
$$y = \alpha - a\beta,$$

d'où

$$(a+b)\alpha^2 + ab(a+b)\beta^2 = z^2.$$

Si $a + b$ est un carré m^2, on est ramené au cas précédent.

Si ab est un carré m^2, en posant $m\beta = \beta'$, on a

$$(a+b)\alpha^2 + (a+b)\beta'^2 = z^2,$$

d'où

$$z = (a+b)z'$$

et

$$\alpha^2 + \beta'^2 = (a+b)z'^2.$$

On est ramené à la première équation de cette Note. On peut y arriver directement en observant que si, dans l'équation

$$ax^2 + by^2 = z^2,$$

ab est un carré, on trouve, après avoir enlevé les facteurs premiers qui entrent à des puissances paires dans a et b, une équation de la forme

$$\mathrm{K}x^2 + \mathrm{K}y^2 = z^2,$$

d'où

$$x^2 + y^2 = K z'^2.$$

Remarque. — Il n'existe aucune méthode pour trouver *une* solution de l'équation

$$ax^2 + by^2 = z^2.$$

En prenant, par exemple, $x = 1$, on est ramené à l'équation

$$z^2 - by^2 = a,$$

équation qui présente les plus grandes difficultés et qui n'a pu être résolue que dans un petit nombre de cas particuliers. Ceci montre combien l'équation générale

$$ax^2 + by^2 = cz^2,$$

même pour des valeurs très simples des nombres a, b, c, est difficile à aborder.

CORRESPONDANCE.

M. **G. Fontené**. — *Sur un article de M. Bouvaist.* — M. Bouvaist a obtenu très élégamment (p. 184) le lieu des centres des cercles circonscrits aux triangles T qui sont circonscrits à une conique S, conjugués à une conique Σ, inscrits par suite à une conique S'; ce lieu dépend uniquement de la conique S et du cercle orthoptique de la conique Σ. Voici quelques remarques concernant les cas où le lieu est un système de deux droites :

1° Quand le lieu se réduit à un point (deux droites

imaginaires), l'une des coniques Σ en nombre infini qui correspondent à l'un ou à l'autre des deux cercles orthoptiques obtenus donne un cercle comme conique S'. Il existe une infinité de triangles inscrits à ce cercle et conjugués à la conique Σ.

2° Lorsque la conique S est une parabole, l'un des triangles T a pour l'un de ses côtés la droite à l'infini du plan, et le lieu comprend la droite à l'infini. Le lieu véritable est alors une droite *réelle*. Pour obtenir ce cas dans le calcul de M. Bouvaist, on transporte l'origine au point de coordonnées $-a$, o, on fait $\frac{b^2}{a} = p$, puis a infini, et l'on trouve

$$0x^2 + 0xy + 0y^2 + Ax + By + C = 0.$$

La conique S' passe alors au centre de la conique Σ, et ses directions asymptotiques sont conjuguées par rapport à Σ.

3° Lorsque la conique Σ est une parabole, la question est illusoire, le centre d'un cercle conjugué à une parabole étant sur la directrice. En posant alors

$$2p\,x_0 = 2q\,y_0 = x_0^2 + y_0^2 - \rho^2 = G,$$

on doit faire G infini, x_0, y_0 et ρ infinis, la puissance de l'origine par rapport au cercle orthoptique de Σ, soit $x_0^2 + y_0^2 - \rho^2$, étant un infiniment grand du même ordre que x_0 et y_0 ; le lieu est la droite double

$$\left(\frac{x}{p} + \frac{y}{q} - 1\right)^2 = 0,$$

c'est-à-dire la directrice comptée deux fois.

J'ai été amené à penser aux deux derniers cas en partant de la conique S' représentée paramétriquement et en regardant les valeurs du paramètre aux sommets

d'un triangle T comme données par l'équation

$$\lambda f(t) + \varphi(t) = 0,$$

où f et φ sont des polynomes du troisième degré; on écrit

$$\lambda f(t) + \varphi(t) = \lambda f(t') + \varphi(t'), \ldots.$$

Le lieu, représenté paramétriquement, peut ainsi se réduire à une droite, et l'on obtient les deux cas signalés ici.

M. **L. Godeaux**. — *Remarque sur un précédent article.* — Inséré dans le numéro de février 1916 (p. 49-61), il a pour titre : « Étude élémentaire sur l'homographie plane de période 3 et sur une surface cubique. »

Au paragraphe 9 (p. 61), nous écrivons :

« ... une surface cubique, possédant trois points doubles biplanaires ordinaires, ne peut pas nécessairement être représentée par l'équation

$$X_1 X_2 X_3 = X_4^3,$$

c'est-à-dire que les trois couples de plans tangents à la surface aux trois points biplanaires ne sont pas nécessairement les faces d'un trièdre; .... »

Il s'agit évidemment d'un *trièdre donné*, car on sait que les trois couples de plans tangents dont il vient d'être question sont toujours les faces d'un trièdre. Telle que nous l'avions écrite, notre phrase pouvait prêter à confusion.

M. **Henri Lebesgue**. — *A propos d'un article de M. Barisien* (mai 1916). — Soient (f) une roulette

fixe, (m) une roulette mobile, P un point entraîné par (m). Quand le centre instantané I se déplace de ds, (m) tourne de $\frac{ds}{R} + \frac{ds}{r}$, R et r étant les rayons de courbure en I des deux roulettes ; rayons qu'on affectera du même signe ou non, suivant que les courbures sont d'orientations différentes ou de même orientation. Donc le déplacement de P est

$$d\sigma = \mathrm{IP}\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{r}\right) ds.$$

Si (m) et (f) sont des circonférences, en prenant pour variable l'angle θ des rayons de I et de P dans (m), et en posant $m\mathrm{P} = l$ (on prendra l du signe de r), on a

$$d\sigma = \sqrt{l^2 + r^2 - 2lr\cos\theta}\left(1 + \frac{r}{R}\right) d\theta.$$

C'est la différentielle elliptique de seconde espèce qui sert à évaluer un arc d'ellipse, d'où la possibilité de définir un arc d'ellipse ayant même longueur qu'un arc donné d'une courbe épicycloïdale générale.

Je précise : faisons correspondre les points de deux courbes épicycloïdales quand ils sont donnés par une même valeur de θ. Cette correspondance conservera les longueurs des arcs, si l'on a

$$(1) \qquad \frac{r}{l} = \frac{r'}{l'}, \qquad r\left(1 + \frac{r}{R}\right) = r'\left(1 + \frac{r'}{R'}\right);$$

dans ces relations, les éléments accentués sont relatifs à la seconde courbe épicycloïdale. Or, si les éléments non accentués sont donnés, on peut calculer les éléments accentués en ajoutant même la condition

$$R' = -2r',$$

auquel cas la seconde courbe est une ellipse.

Les conditions (1) ne sont pas les seules qui assurent la conservation des longueurs. Cette conservation a aussi lieu avec

$$(2) \qquad \frac{r}{l} = \frac{l'}{r'}, \qquad l\left(1 + \frac{r}{R}\right) = r'\left(1 + \frac{r'}{R'}\right).$$

Mais les conditions (1) et (2) sont en réalité identiques; il suffit, pour passer d'une forme des conditions à l'autre, de changer pour l'une des courbes de mode de génération épicycloïdale. On sait, en effet, que chaque courbe épicycloïdale admet une double génération et, entre les éléments r, l, R, r_1, l_1, R_1 relatifs à ces deux générations, on a

$$\frac{r}{l} = \frac{l_1}{r_1} = \frac{R}{R_1}.$$

On pourrait encore déduire les conditions (2) des conditions (1) en utilisant la remarque suivante : soit P' le point conjugué de P, par rapport à (m); son déplacement

$$d\sigma' = IP'\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{r}\right) ds$$

est proportionnel à $d\sigma$, que (f) soit ou non une circonférence, car le rapport $\frac{IP'}{IP}$ est constant.

ANCIENNES QUESTIONS NON RÉSOLUES.

Questions de Mannheim.

820 (**1367**, 335). — On coupe une surface du second degré (S) par un plan. On prend, sur la courbe d'intersection C, quatre points arbitraires (non en ligne droite) a, b, g, h, et l'on

mène en ces points les normales A, B, G, H à la surface (S). On construit le couple de droites D, Δ rencontrant à la fois ces quatre normales et l'on détermine la droite I, issue d'un point fixe i, qui s'appuie sur D et Δ. Démontrer que, lorsque l'on fait varier la position des points a, b, g, h sur C, les droites telles que I engendrent un plan.

821 (**1867**, 336). — Les données restant les mêmes (¹), on construit comme précédemment le couple de droites D, Δ. On prend les traces de ces droites sur un plan fixe (P); on joint ces traces par une droite M.

Démontrer que, lorsque l'on fait varier la position des points a, b, g, h sur C, les droites telles que M passent par un point fixe.

1078 (**1872**, 191). — On donne une courbe plane quelconque et la tangente at au point a de cette courbe. On mène la corde bc parallèlement à la tangente at. Lorsque bc se rapproche indéfiniment de at, en restant parallèle à cette droite, on demande :

1° La limite des positions de la droite ae qui joint le point a au milieu e de la corde bc. On obtient ainsi à la limite la droite que M. Transon a appelée *axe de déviation* de la courbe en a;

2° La limite des positions du point de rencontre des axes de déviation de la courbe en b et c;

3° La limite des positions des droites qu'on obtient en joignant le point a aux points d'intersection des cercles osculateurs de la courbe donnée en b et c;

4° La limite des positions du point de rencontre de la corde commune à ces deux circonférences et de la tangente at.

1363 (**1881**, 192). — On donne une ellipse; on prend le triangle acb formé par les deux tangentes ca, cb à cette courbe et la corde de contact ab, et l'on détermine un point m d'où l'on voit sous des angles droits les côtés du triangle abc. Quelle est la surface, lieu des points tels que m, lorsqu'on prend tous les triangles analogues à acb ?

(¹) Que dans la question 820.

1775 (**1893**, 387). — On donne un point O et une droite D fixes. Une figure de grandeur invariable formée d'un point ω et d'une droite Δ se déplace de façon que ω reste sur D et que Δ, s'appuyant toujours sur cette droite, passe toujours par O. On demande le lieu d'un point arbitraire du plan de la figure mobile. Examiner les différentes formes de ce lieu, lorsqu'on fait varier les données.

2015 (**1905**, 192). — Un trièdre trirectangle a son sommet sur le côté E d'un angle donné. Du point où l'autre côté D de cet angle rencontre l'une des faces de ce trièdre, on élève un plan perpendiculaire à ce côté. Ce plan coupe E en un point d'où l'on abaisse la perpendiculaire A à la face considérée. On détermine de même B, C pour les autres faces du trièdre. Démontrer que les deux droites qui rencontrent A, B, C, D sont perpendiculaires à D et perpendiculaires l'une à l'autre.

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES.

2121.

(1909, p. 142.)

On demande d'établir les propriétés suivantes de la suite (U) *de Fibonacci, définie par la relation de récurrence*

$$u_{n+1} = u_n + u_{n-1},$$

avec

$$u_0 = 0, \qquad u_1 = 1.$$

1° *Si α désigne un nombre premier, la suite* (U) *contient une infinité de termes multiples de α. Soit u_λ le plus petit de ces termes. Le nombre λ divise $\alpha - 1$ si*

$$\alpha = \text{mult. } 10 \pm 1$$

et $\alpha + 1$ si

$$\alpha = \text{mult. } 10 \pm 3.$$

2° *Si p désigne un nombre premier, on a*

$$u_p = \text{mult. } 2p+1 \quad si \quad p = \text{mult. } 10 \pm 1.$$

et

$$u_p = \text{mult. } 2p-1 \quad si \quad p = \text{mult. } 10 \pm 3.$$

Si u_p n'est pas premier, ses facteurs premiers sont de la forme

$$2kp \pm 1.$$

En désignant par α, β, γ, ... ces facteurs, on a

$$u_p = \alpha\beta\gamma\ldots.$$

Alors u_p est le plus petit nombre de la suite divisible séparément par les nombres premiers α, β, γ, ...

G. Hilleret.

Solution

Par M. A. Gérardin.

Il serait facile de démontrer rapidement certaines parties de cette question non résolue, mais j'estime préférable d'en faire remonter tout l'honneur à Édouard Lucas, en citant simplement quelques extraits de ses « Recherches sur plusieurs Ouvrages de Léonard de Pise et sur diverses questions d'Arithmétique supérieure », éditées dans le *Bullettino* du Prince Boncompagni (Rome, 1877, p. 129-193 et 239-293) et surtout des pages 131 à 170 pour la présente question.

« ... Nous signalerons plus particulièrement dans ce travail, une question fort curieuse du Liber Abbaci qui renferme le premier exemple de séries récurrentes .... On retrouve cette série, quatre siècles plus tard, dans la dernière des annotations d'Albert Girard (mort en 1633), sur la traduction française qu'il fit lui-même du cinquième et du sixième livre de l'*Arithmétique* de Diophante .... En 1753, le Dr Robert Simson ... a fait remarquer que la série en question est donnée par le calcul des *quotients* et des *fractions convergentes* des expressions irrationnelles

$$\frac{\sqrt{5}+1}{2} \quad \text{et} \quad \frac{\sqrt{5}-1}{2}$$

qui représentent respectivement les valeurs de

$$2 \sin \frac{\pi}{10} \quad \text{et} \quad 2 \sin 3 \frac{\pi}{10}, \quad \ldots.$$

» Gabriel LAMÉ ..., dans un travail présenté à l'Académie des Sciences dans la séance du 28 octobre 1844, indique l'application qu'on peut faire de cette série, à la détermination d'une limite supérieure du nombre des opérations à faire dans la recherche du plus grand commun diviseur de deux nombres entiers, lorsque l'on emploie la méthode ordinaire de la division ....

» Jacques BINET ..., dans un travail présenté à l'Académie des Sciences dans la séance du 4 novembre 1844, remarque que la série de Lamé 1, 2, 3, 5, 8, 13, ... est identique à celle qui lui avait donné le dénombrement des combinaisons discontiguës, et dont il avait parlé dans un autre travail présenté à la même Académie le 25 septembre 1843 ....

» La série dite de Lamé, mais considérée pour la première fois par Léonard de Pise, ainsi que nous venons de le dire, est une série récurrente donnée par la relation

$$(1) \qquad u_{n+2} = u_{n+1} + u_n,$$

et par les deux conditions initiales

$$u_0 = 0, \qquad u_1 = 1.$$

» L'expression d'un terme quelconque de cette série est donnée, en fonction de son rang, par la formule

$$(2) \qquad \sqrt{5}\, u_n = \left[\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right]^n - \left[\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right]^n$$

qu'il est facile de vérifier *a posteriori* ....

» ... Les termes de rang impair de la série de Lamé ne peuvent contenir qu'une seule fois le facteur 2, et seulement les facteurs premiers impairs de la forme $4p+1$. Nous verrons plus loin que u_{2n+1} ne contient le facteur 2 que lorsque $2n+1$ est un multiple de 3 ....

» La série de Lamé peut être considérée comme le résultat du calcul des réduites successives de la fraction continue

périodique

$$1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cdots}}$$

prolongée indéfiniment, qui représente le développement de l'irrationnelle

$$\frac{1 + \sqrt{5}}{2}, \quad \ldots.$$

» Nous ferons encore observer que la série en question se trouve implicitement renfermée dans le tableau des coefficients des diverses puissances du binome, c'est-à-dire dans le *Triangle arithmétique* de Pascal ....

» ... u_{mn} est toujours exactement divisible par u_m et par u_n, et par leur produit, si m et n sont premiers entre eux. On déduit aussi de ce résultat qu'un terme quelconque u_p de la série ne peut être premier que lorsque p désigne lui-même un nombre premier ....

» Si n désigne un nombre impair quelconque, les diviseurs de $\frac{u_{3n}}{u_n}$ sont des diviseurs de la forme quadratique $5x^2 - 3y^2$.

» On sait d'ailleurs que les diviseurs quadratiques de cette forme sont de l'une des formes

$$\pm(u^2 - 15v^2), \qquad \pm(5u^2 - 3v^2),$$

et que les diviseurs linéaires impairs sont compris dans l'une des formes suivantes :

$$60q + 1, 49, 11, 59, \quad 60q + 7, 43, 17, 53, \quad \ldots.$$

» Si n désigne un nombre pair quelconque, les diviseurs de $\frac{u_{3n}}{u_n}$ sont des diviseurs de la forme quadratique $5x^2 + 3y^2$.

» On sait encore que les diviseurs quadratiques de cette forme sont de l'une des deux formes

$$u^2 + 15v^2, \quad 3u^2 + 5v^2$$

et que les diviseurs impairs correspondants sont

$$30q + 1, 19, \quad 30q + 17, 23, \quad \ldots.$$

» Supposons p premier impair et u_n divisible par p^λ; on voit alors que u_{pn} est divisible par $p^{\lambda+1}$, et non par une autre puissance de p; de là le théorème suivant qui exprime LA LOI DE LA RÉPÉTITION de la présence d'un nombre premier dans la série de Fibonacci :

» THÉORÈME. — *Si n désigne le rang d'un terme de la série contenant le facteur premier p à la puissance λ, le rang du premier terme de cette série divisible par la puissance $\lambda+1$ de p, et non par une puissance supérieure, est égal à pn ....*

» Nous verrons plus loin que n est toujours un diviseur de $p\pm 1$ .... »

Ed. Lucas donne ensuite les diviseurs linéaires des formes $\frac{u_{4n}}{u_{2n}}$.

« ... Nous allons faire voir maintenant que la série de Lamé contient sans aucune exception tous les nombres premiers, à des rangs nettement déterminés, et démontrer le théorème suivant qui exprime la LOI DE L'APPARITION d'un nombre premier, dans cette série :

» THÉORÈME. — *Si p désigne un nombre premier de la forme $10q\pm 1$, le terme de rang $p-1$ dans la série de Lamé est divisible par p, et si p désigne un nombre premier de la forme $10q\pm 3$, le terme de rang $p+1$ dans la série de Lamé est divisible par p ....*

» 1° En effet, supposons d'abord que le nombre premier p soit de la forme $10q\pm 3$. On a

$$2^p u_{p+1} = C_{p+1,1} + 5\,C_{p+1,3} + \ldots + 5^{\frac{p-1}{2}};$$

si l'on remarque que $C_{p+1,n}$ est divisible par le nombre premier p, lorsque n est différent de 1 ou de $p-1$, et que $C_{p+1,1}$ est égal à $p+1$, on obtient, suivant le module p, la congruence

$$2^p u_{p+1} \equiv 1 + 5^{\frac{p+1}{2}} \pmod{p}.$$

Mais, puisque 5 est non-résidu quadratique de tout nombre impair de la forme $5n\pm 2$, le second membre de la con-

gruence est un multiple de p, en vertu du théorème de Fermat qui donne la relation

$$5^{p-1} - 1 \equiv 0 \pmod{p}$$

qu'on peut écrire

$$\left[5^{\frac{p-1}{2}} - 1\right]\left[5^{\frac{p-1}{2}} + 1\right] \equiv 0 \pmod{p}.$$

» Il en résulte que $2^p u_{p+1}$, et par suite u_{p+1}, est divisible par p; c'est la première partie du théorème qu'il s'agissait de démontrer.

» 2° Désignons maintenant par p un nombre premier de la forme $10q \pm 1$; on a alors

$$2^{p-2} u_{p-1} = C_{p-1,1} + 5 C_{p-1,3} + \ldots + 5^{\frac{p-3}{2}}.$$

» Mais si nous remarquons que, pour le module premier p, on a généralement

(10) $$C_{p-1,2n+1} \equiv -1 \pmod{p},$$

il en résulte

$$2^{p-2} u_{p-1} \equiv -\left[1 + 5 + 5^2 + \ldots + 5^{\frac{p-3}{2}}\right] \pmod{p},$$

et, par suite,

$$2^p u_{p-1} \equiv 1 - 5^{\frac{p-1}{2}} \pmod{p}.$$

» Mais, puisque 5 est résidu quadratique de tous les nombres premiers qui sont résidus quadratiques de 5, le second membre de la congruence est divisible par p, il en est donc de même de u_{p-1} .... »

(*Cf.* 121 à 123, *Disquis. Arith.* de Gauss.)

« ... Théorème général. — *Lorsque, dans la série de Lamé, le terme de rang $p+1$ est divisible par p, sans qu'aucun des termes dont le rang est un diviseur de $p+1$ le soit, le nombre p est un nombre premier, et l'on a*

$$p = 10q \pm 3;$$

de même, lorsque le terme de rang $p-1$ est divisible par p, sans qu'aucun des termes dont le rang est un divi-

seur de p — 1 le soit, le nombre p est un nombre premier, et l'on a

$$p = 10q \pm 1 \ldots\ldots »$$

BIBLIOGRAPHIE ABRÉGÉE.

Scritti di Leonardo Pisano, vol. I, p. 283-284.

L'Arithmétique de Simon Stevin de Bruges, p. 677.

Philos. Transact. of the R. Soc of London ... par Hutton, vol. X, 1809, p. 430.

C. R., t. 17, 1843, p. 562; t. 19, 1844, p. 867 et 939; t. 49, 1856, p. 873; t. 82, 1876, p. 165 et 1303; t. 83, 1876, p. 1286; t. 84, 1877, p. 439 et suiv.

PLANA, *Mem. d. R. Ac. d. Sc. di Torino*, 2e série, t. 20, p. 91, et 1876, p. 928.

J. de Crelle, 1828, p. 87.

N. C., 1876, p, 74.

GENOCCHI, *Annali di Mat.*, 1868, p. 256.

A. F. A. S., 1876, art. Ed. LUCAS.

N. A., 2e série, t. 14, 1875, p. 523 et suiv.

Ed. LUCAS, *Sur la théorie des fonctions numériques simplement périodiques*, 1878.

Interm. des Math. et *Sphinx Œdipe*, *passim*.

J'ajoute que Ed. Lucas a donné le tableau des 60 premiers termes de la série de Fibonacci, avec leurs facteurs propres et impropres.

ADDITION, PAR M. H. BROCARD.

Depuis la publication susmentionnée de 1877, on a obtenu la preuve authentique du décès d'Albert Girard, non en 1633, mais dans les premiers jours de décembre 1632 (Voir *Interm. des Math.*, 1895, p. 193, rép. 373).

Il est juste aussi de rappeler que dans le présent journal (1853, p. 195) Terquem a, le premier, signalé que le titre de *siamélois* d'Albert Girard voulait dire natif de Saint-Mihiel (chef-lieu de canton de la Meuse).

QUESTIONS.

2290. Si d'un point P d'une strophoïde dont les tangentes au point double sont Ox et Oy, on mène à la courbe deux tangentes PAC, PBD, A et B étant sur Ox, C et D sur Oy, on a

$$\left(\frac{1}{OA} - \frac{1}{OB}\right)\left(\frac{1}{OC} - \frac{1}{OD}\right) = \text{const.}$$

R. Bouvaist.

2291. Soient O le point double d'une cubique nodale, Ox et Oy les tangentes en ce point, M un point de la courbe, T_M la tangente en ce point; T_M rencontre la courbe en M_1, soit T_{M_1} la tangente en ce point, la conjuguée harmonique de T_{M_1} par rapport à OM_1, T_M rencontre Ox et Oy en A et B, la conique passant par OAB et tangente en M à la cubique a, avec celle-ci en M, un contact du troisième ordre. R. Bouvaist.

2292. Soit H_3 une hypocycloïde à trois rebroussements tangente à deux droites rectangulaires OA et OB en A et B, l'hyperbole équilatère qui touche AB et admet pour asymptotes OA et OB a, en dehors des côtés du triangle OAB, trois tangentes communes avec H_3; montrer que le centre de gravité du triangle formé par ces trois tangentes est le point O.

R. Bouvaist.

2293. L'équation

$$1 + \sum_{n=1}^{n=+\infty} q^{n^2}\left(b^n b_1^{n-1} \ldots b_{n-1} x^n + c^n c_1^{n-1} \ldots c_{n-1} \frac{1}{x^n}\right) = 0,$$

où q réel est inférieur à 0,456 et les quantités c et b, quels que soient les indices, sont comprises entre -1 et $+1$, a toutes ses racines réelles. A. Pellet.

[A1b]

SUR DES IDENTITÉS REMARQUABLES;

PAR M. MATHIEU WEILL.

Soit

$$ab = \lambda, \qquad a + b = \mu,$$

d'où

$$a^2 = \mu a - \lambda,$$
$$b^2 = \mu b - \lambda.$$

Considérons

$$P = (x + ay + bz)(x + by + az)$$
$$= x^2 + \lambda y^2 + \lambda z^2 + \mu xy + \mu xz + (\mu^2 - 2\lambda)yz,$$

$$Q = (x + ay + bz)(x' + ay' + bz')$$
$$= xx' + a^2 yy' + b^2 zz' + a(xy' + yx') + b(zx' + xz')$$
$$+ \lambda(yz' + zy')$$

ou

$$Q = X + aY + bZ,$$

en posant

$$X = xx' - \lambda yy' - \lambda zz' + \lambda(yz' + zy'),$$
$$Y = \mu yy' + xy' + yx',$$
$$Z = \mu zz' + zx' + xz'.$$

Soit

$$R = (x + ay + bz)(x + by + az)$$
$$\times (x' + ay' + bz')(x' + by' + az').$$

On aura, d'après ce qui précède,

$$R = (X + aY + bZ)(X + bY + aZ)$$
$$= X^2 + \lambda Y^2 + \lambda Z^2 + \mu XY + \mu XZ + (\mu^2 - 2\lambda)YZ.$$

R n'est autre que le produit des deux formes :

$$x^2 + \lambda y^2 + \lambda z^2 + \mu xy + \mu xz + (\mu^2 - 2\lambda)yz,$$
$$x'^2 + \lambda y'^2 + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + (\mu^2 - 2\lambda)y'z'.$$

Donc nous avons le théorème suivant :

THÉORÈME. — *Le produit des deux formes*

$$x^2+\lambda y^2+\lambda z^2+\ldots+(\mu^2-2\lambda)yz,$$
$$x'^2+\lambda y'^2+\ldots\ldots\ldots+(\mu^2-2\lambda)y'z'$$

est une forme de même espèce, et cela de plusieurs manières, car on peut permuter y avec z, ce qui change X, Y, Z; *ou y' avec z'.*

En donnant à λ et à μ des valeurs particulières, on obtient un grand nombre d'identités.

Faisons, par exemple, $\lambda=1$, $\mu=-1$; il vient

$$(x^2+y^2+z^2-xy-xz-yz)(x'^2+y'^2+z'^2-x'y'-x'z'-y'z')$$
$$=X^2+Y^2+Z^2-XY-XZ-YZ,$$

avec

$$X=xx'-yy'-zz'+yz'+zy',$$
$$Y=-yy'+xy'+yx',$$
$$Z=-zz'+zx'+xz'.$$

En permutant x avec y ou avec z, ou x' avec y', ..., on obtient diverses valeurs pour le système X, Y, Z :

En particulier, si l'on fait

$$x=x',$$
$$y=y',$$
$$z=z',$$

il vient

$$(x^2+y^2+z^2-xy-xz-yz)^2$$
$$=X^2+Y^2+Z^2-XY-XZ-YZ,$$

avec

$$X=x^2-(y-z)^2,$$
$$Y=2xy-y^2,$$
$$Z=2xz-z^2.$$

On aura aussi, évidemment,

$$X_1 = y^2 - (x - z)^2,$$
$$Y_1 = 2yx - x^2,$$
$$Z_1 = 2yz - z^2;$$

$$X_2 = z^2 - (x - y)^2,$$
$$Y_2 = 2zx - x^2,$$
$$Z_2 = 2zy - y^2,$$

ce qui donne trois formes distinctes.

Dans le cas particulier des deux formes

$$x^2 + y^2 + z^2 - xy - xz - yz,$$
$$x'^2 + y'^2 + z'^2 - x'y' - x'z' - y'z',$$

on peut obtenir des résultats différents en partant de l'identité

$$x^2 + y^2 + z^2 - xy - xz - yz$$
$$= (x + \alpha y + \alpha^2 z)(x + \alpha^2 y + \alpha z),$$

α et α^2 désignant les racines cubiques imaginaires de l'unité.

On a

$$(x + \alpha y + \alpha^2 z)(x' + \alpha y' + \alpha^2 z') = X + \alpha Y + \alpha^2 Z,$$

avec

$$X = xx' + yz' + zy',$$
$$Y = zz' + xy' + yx',$$
$$Z = yy' + xz' + zx'.$$

Le produit

$$P = (x + \alpha y + \alpha^2 z)(x + \alpha^2 y + \alpha z)$$
$$\times (x' + \alpha y' + \alpha^2 z')(x' + \alpha^2 y' + \alpha z')$$

s'écrira donc

$$(X + \alpha Y + \alpha^2 Z)(X + \alpha^2 Y + \alpha Z)$$
$$= X^2 + Y^2 + Z^2 - XY - XZ - YZ.$$

C'est une nouvelle forme du produit

$$(x^2+y^2+z^2-xy-xz-yz)(x'^2+y'^2+z'^2-x'y'-x'z'-y'z').$$

En particulier, si l'on prend

$$x=x', \qquad y=y', \qquad z=z',$$

on aura

$$\begin{aligned}(x^2+y^2+z^2-xy-xz-yz)^2 \\ =(x^2+2yz)^2+(y^2+2xz)^2+(z^2+2xy)^2 \\ -(x^2+2yz)(y^2+2xz)-\ldots.\end{aligned}$$

Reprenant la formule générale, faisons

$$\mu=1, \qquad z=0, \qquad z'=0;$$

il vient

$$(x^2+\lambda y^2+xy)(x'^2+\lambda y'^2+x'y')=X^2+\lambda Y^2+XY,$$

avec

$$\begin{aligned}X&=xx'-\lambda yy', \\ Y&=yy'+xy'+yx',\end{aligned}$$

et, en faisant $\lambda=1$,

$$(x^2+y^2+xy)(x'^2+y'^2+x'y')=X^2+Y^2+XY,$$

avec

$$\begin{aligned}X&=xx'-yy', \\ Y&=yy'+xy'+yx'.\end{aligned}$$

Permutant x avec y, on aura un nouveau système

$$\begin{aligned}X_1&=yx'-xy', \\ Y_1&=xy'+yy'+xx',\end{aligned}$$

et ainsi de suite. On voit que l'identité générale que nous avons établie conduit à un très grand nombre d'identités nouvelles, qui peuvent avoir leur intérêt en Algèbre et dans la Théorie des nombres.

Considérons l'expression

$$\begin{aligned} K &= a^3 + b^3 + c^3 - 3abc \\ &= (a+b+c)(a+b\alpha+c\alpha^2)(a+b\alpha^2+c\alpha), \end{aligned}$$

et l'expression

$$\begin{aligned} L &= a'^3 + b'^3 + c'^3 - 3a'b'c' \\ &= (a'+b'+c')(a'+b'\alpha+c'\alpha^2)(a'+b'\alpha^2+c'\alpha). \end{aligned}$$

Le produit KL s'écrira

$$(A+B+C)(A+B\alpha+C\alpha^2)(A+B\alpha^2+C\alpha)$$

avec

$$\begin{aligned} A &= aa' + bb' + cc', \\ B &= ab' + bc' + ca', \\ C &= ac' + ba' + cb'. \end{aligned}$$

Pour le voir, il suffit de faire, séparément, les produits de

$$a+b+c \quad \text{par} \quad a'+b'+c',$$

de

$$a+b\alpha+c\alpha^2 \quad \text{par} \quad a'+b'\alpha^2+c'\alpha,$$

et de

$$a+b\alpha^2+c\alpha \quad \text{par} \quad a'+b'\alpha+c'\alpha^2.$$

On voit donc que le produit des deux formes

$$\begin{aligned} &a^3 + b^3 + c^3 - 3abc, \\ &a'^3 + b'^3 + c'^3 - 3a'b'c', \end{aligned}$$

est une forme de même espèce. On arrive d'ailleurs à ce résultat, immédiatement, en faisant le produit des déterminants :

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{vmatrix} = 3abc - a^3 - b^3 - c^3,$$

$$\begin{vmatrix} a' & b' & c' \\ b' & c' & a' \\ c' & a' & b' \end{vmatrix} = 3a'b'c' - a'^3 - b'^3 - c'^3.$$

Leur produit est le déterminant

$$-\begin{vmatrix} A & B & C \\ B & C & A \\ C & A & B \end{vmatrix} = A^3 + B^3 + C^3 - 3ABC,$$

A, B, C ayant les valeurs indiquées plus haut.

Décomposons la forme

$$a^3 + b^3 + c^3 - 3abc,$$

et faisons le produit

$$(a + b + c)(a + b\alpha + c\alpha^2),$$

puis

$$(a + b + c)(a + b\alpha^2 + c\alpha),$$

puis

$$(a + b\alpha + c\alpha^2)(a + b\alpha^2 + c\alpha).$$

Le premier produit est égal à

$$a^2 - bc + \alpha(b^2 - ac) + \alpha^2(c^2 - ab);$$

le second est égal à

$$a^2 - bc + \alpha^2(b^2 - ac) + \alpha(c^2 - ab);$$

le troisième est égal à

$$a^2 - bc + b^2 - ac + c^2 - ab.$$

On a donc l'identité

$$(a^3 + b^3 + c^3 - 3abc)^2 = A^3 + B^3 + C^3 - 3ABC,$$

avec

$$A = a^2 - bc,$$
$$B = b^2 - ac,$$
$$C = c^2 - ab.$$

La première méthode ne donne pas cette identité.

Considérons, enfin, le déterminant

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & b & c & d \\ b & c & d & a \\ c & d & a & b \\ d & a & b & c \end{vmatrix} = (b^2 - d^2)^2 - (a^2 - c^2)^2 + 4bd(a^2 + c^2) - 4ac(b^2 + d^2).$$

Soit

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} a' & b' & c' & d' \\ b' & c' & d' & a' \\ c' & d' & .. & .. \\ d' & a' & .. & .. \end{vmatrix}.$$

On aura

$$P = \Delta, \Delta_1 = - \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix},$$

en écrivant, pour abréger,

$$\begin{aligned} 1 &= aa' + bb' + cc' + dd', \\ 2 &= ab' + bc' + cd' + da', \\ 3 &= ac' + bd' + ca' + db', \\ 4 &= ad' + ba' + cb' + dc'. \end{aligned}$$

On peut donc énoncer le théorème suivant :

Théorème. — *Le produit des deux formes*

$$(b^2 - d^2 + a^2 - c^2)(b^2 - d^2 - a^2 + c^2) + 4(ad - bc)(ab - cd),$$

$$(b'^2 - d'^2 + a'^2 - c'^2)(b'^2 - d'^2 - a'^2 + c'^2) + 4(a'd' - b'c')(a'b' - c'd')$$

est une forme de même espèce, précédée du signe (—).

Considérons, d'autre part, l'équation binome

$$x^4 - 1 = 0,$$

et soit α l'une des racines ; le déterminant

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & b & c & d \\ b & c & d & a \\ c & d & a & b \\ d & a & b & c \end{vmatrix}$$

peut s'écrire, en remarquant que si l'on pose

$$A = a + b\alpha + c\alpha^2 + d\alpha^3,$$

on a

$$\frac{A}{\alpha} = b + c\alpha + d\alpha^2 + a\alpha^3,$$

$$\frac{A}{\alpha^2} = c + d\alpha + a\alpha^2 + b\alpha^3,$$

$$\frac{A}{\alpha^3} = d + a\alpha + b\alpha^2 + c\alpha^3;$$

$$\Delta = A \begin{vmatrix} 1 & b & c & d \\ \frac{1}{\alpha} & c & d & a \\ \frac{1}{\alpha^2} & d & a & b \\ \frac{1}{\alpha^3} & a & b & c \end{vmatrix}.$$

On en conclut, facilement, que Δ est divisible par le produit des quatre valeurs obtenues en remplaçant dans A, α, par les quatre racines de $x^4 - 1 = 0$, c'est-à-dire par 1, -1, i et $-i$. Or, le produit des quatre polynomes ainsi formés peut s'écrire

$$P = (a + b + c + d)(a - b + c - d)[(a - c)^2 + (b - d)^2].$$

Ce produit est égal à $-\Delta$.

On a donc le théorème suivant :

Théorème. — *Le produit des deux formes*

$$P = (a + b + c + d)(a - b + c - d)[(a - c)^2 + (b - d)^2],$$

$$P_1 = (a' + b' + c' + d')(a' - b + c' - d')[(a' - c')^2 + (b' - d')^2]$$

est une forme de même espèce,

$$R = -[A + B + C + D][A - B + C - D] \times [(A - C)^2 + (B - D)^2]$$

avec

$$A = aa' + bb' + cc' + dd',$$
$$B = ab' + bc' + cd' + da',$$
$$C = ac' + bd' + ca' + db',$$
$$D = ad' + ba' + cb' + dc'.$$

Le résultat est général. Considérons le déterminant

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & \ldots & .. & a_n \\ a_2 & a_3 & \ldots & a_n & a_1 \\ .. & .. & \ldots & .. & .. \\ a_n & a_1 & \ldots & .. & a_{n-1} \end{vmatrix}$$

et l'équation binome

$$x^n - 1 = 0,$$

dont les racines sont $\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_n$; on a

$$\Delta = \pm \Pi(a_1 + a_2\alpha_1 + a_3\alpha_1^2 + \ldots + a_n\alpha_1^{n-1}).$$

Si nous remplaçons les $a_1 a_2 \ldots a_n$ par $b_1 b_2 \ldots b_n$, nous aurons un autre déterminant de même espèce

$$\Delta_1 = \pm \Pi(b_1 + b_2\alpha_1 + \ldots + b_n\alpha_1^{n-1})$$

et le produit $\Delta\Delta_1$ sera un déterminant de la même espèce

$$D = \Delta, \Delta_1 = \Pi(A_1 + A_2\alpha_1 + \ldots + A_n\alpha_1^{n-1})$$

avec

$$A_1 = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \ldots + a_n b_n,$$
$$A_2 = a_1 b_2 + a_2 b_3 + \ldots + a_n b_1,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

d'où une identité très générale.

D'ailleurs, le déterminant Δ n'est autre que le *résul-*

tant, à un facteur près, des polynomes

$$a_1 + a_2 x + \ldots + a_n x^{n-1}$$

et

$$x^n - 1.$$

Le produit $\Delta\Delta_1$ est, d'une part, le produit des résultants des deux polynomes

$$a_1 + a_2 x + \ldots + a_n x^{n-1},$$
$$b_1 + b_2 x + \ldots + b_n x^{n-1}$$

et

$$x^n - 1,$$

et, d'autre part, le résultant du produit

$$A = (a_1 + a_2 x + \ldots + a_n x^{n-1})(b_1 + b_2 x + \ldots + b_n x^{n-1})$$

et de

$$x^n - 1.$$

On peut, dans tout ce qui précède, supposer nul un coefficient, ou même en supposer plusieurs nuls. Considérons, par exemple, le déterminant

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & b & c & 0 \\ b & c & 0 & a \\ c & 0 & a & b \\ 0 & a & b & c \end{vmatrix}$$

et l'équation binome

$$x^n - 1 = 0,$$

on a

$$\begin{aligned} \Delta &= -[a+b+c][a-b+c][a+ib-c][a-ib-c] \\ &= -[(a+c)^2 - b^2][(a-c)^2 + b^2]. \end{aligned}$$

Soit

$$\Delta_1 = -[(a_1+c_1)^2 - b_1^2][(a_1-c_1)^2 + b_1^2].$$

Le produit $\Delta\Delta_1$ sera égal à R, et l'on aura

$$\begin{aligned} R = &-[A+B+C+D][A-B+C-D] \\ &\times [(A-C)^2 + (B-D)^2], \end{aligned}$$

avec

$$A = aa_1 + bb_1 + cc_1,$$
$$B = ab_1 + bc_1,$$
$$C = ac_1 + ca_1,$$
$$D = ba_1 + cb_1.$$

[D2a]

NOUVELLE DÉMONSTRATION D'UN THÉORÈME D'ABEL SUR LES SÉRIES;

Par M. J.-B. POMEY.

Remarque préliminaire. — Soit, dans le plan, un ensemble (A) de points $A_0, A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots$ contenus dans un cercle C de rayon R; si je forme l'ensemble (B) des points $B_0, B_1, B_2, \ldots, B_n, \ldots$ homologues respectivement des points $A_0, A_1, \ldots, A_n, \ldots$ dans une transformation homothétique opérée à partir d'un point P, situé à l'intérieur du cercle C, comme centre d'homothétie et avec un rapport de similitude λ inférieur à l'unité mais positif, la figure (B) est contenue dans un cercle C' de rayon $R' = \lambda R$ et le cercle C' est contenu à l'intérieur du cercle C; les deux figures coïncideraient, naturellement, si λ était égal à l'unité. Je dirai pour abréger que j'opère sur (A) la transformation $S_\lambda^P(A)$ et que j'obtiens l'ensemble (B). J'écrirai alors $S_\lambda^P(A) \equiv (B)$.

Énoncé. — Considérons une suite de vecteurs $u_0, u_1, u_2, \ldots, u_n, \ldots$ en nombre infini, mais supposons que le plus grand des vecteurs

$$s_0 = u_0, \quad s_1 = u_0 + u_1, \quad s_2 = u_0 + u_1 + u_2 \ldots, \quad s_n = \Sigma(u_n) \ldots$$

demeure fini. Supposons que les nombres a_0, a_1, a_2, ..., a_n, ... soient une infinité de nombres positifs, rangés par ordre décroissant de façon que chacun d'eux soit tout au plus égal au précédent, mais tels cependant que, si l'on se donne un nombre ε aussi petit qu'on voudra, on puisse prendre n assez grand pour que tous les nombres à partir de a_n soient inférieurs à ε. Je dis que la série

$$a_0 u_0 + a_1 u_1 + \ldots + a_n u_n + \ldots$$

est convergente.

Démonstration. — Soient B_0, B_1, B_2, ..., B_n, ... les extrémités des vecteurs s_0, s_1, s_2, ..., s_n, ... appliqués à l'origine, comme le seraient des forces. Je puis tracer un cercle C de rayon R assez grand pour contenir à son intérieur tous les points (B) de cet ensemble, en même temps que l'origine que j'appellerai Q. Je fais la transformation $S^{Q}_{a_0}(B)$ et j'obtiens les points B^0_0, B^0_1, B^0_2, ... Le premier B^0_0 est l'extrémité du vecteur $a_0 u_0$ et le vecteur B^0_{n-1}, B^0_n est égal à $a_0 u_n$. Ceci posé, je fais les opérations successives :

$$S^{a}_{a_0}(B_0\, B_1 \ldots B_n \ldots) \equiv (B^0_0\, B^0_1\, B^0_2 \ldots B^0_n \ldots),$$

$$S^{B^0_0}_{\frac{a_1}{a_0}}(B^0_1\, B^0_2 \ldots B^0_n \ldots) \equiv (B^1_1\, B^1_2\, B^1_3 \ldots B^1_n \ldots),$$

$$S^{B^1_1}_{\frac{a_2}{a_1}}(B^1_2\, B^1_3 \ldots B'_n \ldots) \equiv (B^2_2\, B^2_3\, B^2_4 \ldots B^2_n \ldots),$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$S^{B^{n-1}_{n-1}}_{\frac{a_n}{a_{n-1}}}(B^{n-1}_1\, B^{n-1}_{n+1} \ldots) \equiv (B^n_n\, B^n_{n+1} \ldots),$$

Les points B^0_0, B^0_1, B^0_2, ... sont compris à l'intérieur d'un cercle C_0 de rayon $R_0 = a_0 R$; les points B^1_1, B^1_2, B^1_3, ... sont compris à l'intérieur d'un cercle C_1 de

rayon $R_1 = \frac{a_1}{a_0} R_0 = a_1 R$; les points B_2^2, B_3^2, ... sont compris à l'intérieur d'un cercle C_2 de rayon $R_2 = \frac{a_2}{a_1} R_1 = a_2 R$; les points B_n^n, B_{n+1}^n, ... sont compris à l'intérieur d'un cercle C_n de rayon $R_n = a_n R$. Or, le cercle C enveloppe le cercle C_0 qui enveloppe le cercle C_1 qui enveloppe le cercle C_2, ..., qui enveloppe le cercle C_n dont le rayon tend vers zéro quand n tend vers l'infini. Donc les centres d'homothétie successifs Q, B_0^0, B_1^1, B_2^2, ..., B_n^n, ... qui sont compris respectivement à l'intérieur de ces divers cercles successifs tendent vers un point limite Σ bien déterminé. Maintenant, examinons les valeurs de QB_0^0, de QB_1^1, ... et de QB_n^n. Tout d'abord QB_0^0 est un vecteur égal à $a_0 u_0$, $B_0^0 B_1^0$ est un vecteur égal à $a_0 u_1$, donc $B_0^0 B_1^1$ est un vecteur égal à

$$\frac{a_1}{a_0} \times a_0 u_1 = a_1 u_1$$

et QB_1^1 est, par suite, égal à

$$a_0 u_0 + a_1 u_1.$$

D'une façon générale, je dis que le vecteur QB_n^n est égal à

$$a_0 u_0 + a_1 u_1 + \ldots + a_n u_n,$$

car la même formule subsiste quand on change n en $n+1$. En effet, il suffit de considérer les vecteurs $B_n^0 B_{n+1}^0$, $B_n^1 B_{n+1}^1$, $B_n^2 B_{n+1}^2$, ... pour voir qu'ils sont égaux respectivement à

$$a_0 u_{n+1}, \quad a_1 u_{n+1}, \quad a_2 u_{n+1}, \quad \ldots;$$

puis, quand nous prenons B_n^n pour centre d'homo-

thétie, nous avons enfin

$$B_n^n B_{n+1}^{n+1} = \frac{a_{n+1}}{a_n} B_n^n B_{n+1}^n = \frac{a_{n+1}}{a_n} a_n u_{n+1} = a_{n+1} u_{n+1},$$

ce qui établit la loi et prouve en même temps que la limite de QB_n^n ou $\Sigma a_n u_n$ est le vecteur bien déterminé $Q\Sigma$.

[D1c][S2]

GÉNÉRALISATION DU THÉORÈME DE ROLLE ET APPLICATION A LA PHYSIQUE;

Par M. J.-B. POMEY.

1° Considérons, dans le plan, un champ de force limité par un contour simple; soit F la force; supposons que l'on ait rot. $F = 0$, que F soit bien déterminée, finie et continue, et dirigée, en tous les points du contour, suivant la normale vers l'intérieur du champ. Je dis qu'il y a un point du champ (au moins) où F s'annule.

En effet, le travail accompli en allant à l'intérieur du champ d'un point A à un point B ne dépend pas de la forme du chemin parcouru et s'annule si A et B sont tous deux sur le contour, qui est une ligne de niveau. Si l'on choisit entre ces deux points du contour un chemin quelconque dans le champ, le travail, partant de la valeur zéro, est d'abord positif, puis revient à la valeur zéro; il a donc dû passer par un maximum. Il y a ainsi un maximum sur chaque segment d'ordonnée intercepté par le contour et il y a un maximum maxi-

morum sur le lieu desdits maxima. En ce point, le travail est maximum ; on y a donc $F = 0$. Ce point est un centre d'équilibre.

On peut généraliser en admettant que la force F puisse éprouver une discontinuité finie sans changement de signe le long d'une portion de ligne de niveau. Car, en traversant cette ligne, le travail varie d'une façon continue, malgré la discontinuité et dans le même sens que si celle-ci n'existait pas. L'existence d'un maximum maximorum en dehors de cette ligne de discontinuité, qui pourrait donner lieu à difficulté, continue donc à être établie.

2° Supposons que la force, restant soumise aux mêmes conditions générales de continuité, satisfasse à la condition div. $F = 0$ en tous les points du champ et soit tangente au contour en tous ses points. On obtiendra des conclusions analogues en envisageant le flux de force à travers un chemin $\overrightarrow{AB}$ (au lieu du travail). Et la même généralisation s'applique. Il y a un point où F s'annule. On peut appliquer ces considérations au mouvement d'un fluide ; le système envisagé est cylindrique et, si l'on fait abstraction de la troisième dimension, il s'opère en vase clos. Ce qu'on démontre dans le premier cas, c'est que, dans le mouvement irrotationnel d'un fluide comprimé de toutes parts, il y a au moins un élément de convergence au repos à l'époque considérée, et ce qu'on démontre dans le second c'est que, dans le mouvement d'un liquide incompressible dans un vase à parois rigides, il y au moins un élément de tourbillon au repos à cet instant. Il est facile de généraliser dans l'espace à trois dimensions.

[L¹17d]

UNE EXTENSION D'UN THÉORÈME DE PONCELET;

PAR M. F. GONSETH,
Assistant à l'École Polytechnique fédérale de Zurich.

Ce théorème, bien connu, s'énonce ainsi :

S'il existe un polygone inscrit dans une conique C_2, *et circonscrit à une autre conique* Γ_2, *il existe une infinité de pareils polygones inscrits dans* C_2 *et circonscrits à* Γ_2.

Il est susceptible d'une extension dans l'espace.

Supposons qu'une conique C_2, d'un plan π, et une cubique gauche C_3 soient rapportées projectivement; soit M' le point de C_2 correspondant au point M de C_3.

Transformons C_3 dans une corrélation focale arbitraire. A tout point M, de C_3, va correspondre un plan μ, passant par M; l'enveloppe des plans μ est une seconde cubique gauche Γ_3. Un plan μ coupe C_3 en deux points M_1 et M_2 différents de M. Soient M', M'_1 et M'_2 les correspondants sur C_2. Joignons M' à M'_1 et M'_2; les droites $M'M'_1$ et $M'M'_2$, lorsque M décrit la cubique C_3, enveloppent une même conique Γ_2. En effet : les seuls plans μ passant par M sont le plan focal de M et ceux de M_1 et de M_2; ces plans ne contiennent que les deux cordes MM_1 et MM_2 de C_3, passant par M; l'enveloppe des droites $M'M'_1$ et $M'M'_2$ est donc bien une conique.

Toute corrélation focale détermine, comme on sait,

un complexe linéaire de droites, L. Les droites telles que MM_1 et MM_2 appartiennent au complexe L déterminé par la corrélation introduite plus haut. L est d'ailleurs déterminé par cinq de ces droites, et la conique Γ_2 par les cinq droites de π qui leur correspondent.

Ainsi, à tout système focal correspond une conique Γ_2 et réciproquement.

Supposons maintenant qu'il existe un polygone de n côtés inscrit à C_2 et circonscrit à Γ_2. On voit immédiatement qu'en pareil cas il existe un polygone gauche fermé, de n côtés, dont les sommets sont sur C_3, et dont les plans (joignant deux côtés consécutifs) sont osculateurs à Γ_3; et le théorème de Poncelet se transforme dans le suivant :

S'il existe un polygone gauche dont les sommets sont sur une cubique gauche, C_3, *et dont les plans* (*joignant deux côtés consécutifs*) *sont osculateurs à une seconde cubique gauche* Γ_3, *si de plus* C_3 *et* Γ_3 *sont réciproques dans un système focal arbitraire, il existe une simple infinité de pareils polygones inscrits dans* C_3 *et circonscrits à* Γ_3.

CORRESPONDANCE.

Un abonné. — *Au sujet du problème de Pappus généralisé.* — Maintenant que M. Joffroy a démontré (*N. A.*, 1916, p. 168) que le problème de Pappus généralisé est résoluble au moyen d'équations du

second degré, il est facile de fournir une explication de ce fait. Pour sa solution, M. Joffroy emploie les deux équations

$$x^2+y^2-2xy\cos\omega-l^2=0,$$
$$xy-a(x+y)=0.$$

La première représente une conique ayant pour axes les bissectrices de l'angle xOy; la seconde une hyperbole ayant pour centre le point P, pour asymptotes les parallèles à Ox et Oy menées par P, pour sommet le point O. Les deux coniques ont donc OP pour axe de symétrie commun et l'on est par suite assuré que la détermination de leurs points d'intersection dépend d'équations du second degré.

Et en effet, si l'on substitue à x et y les valeurs

$$x=\frac{X\sin\frac{\omega}{2}+Y\cos\frac{\omega}{2}}{\sin\omega},\qquad y=\frac{X\sin\frac{\omega}{2}-Y\cos\frac{\omega}{2}}{\sin\omega},$$

ce qui revient à prendre pour nouveaux axes de coordonnées les bissectrices de l'angle xOy, les équations précédentes deviennent

$$X^2\sin^2\frac{\omega}{2}(1-\cos\omega)+Y^2\cos^2\frac{\omega}{2}(1+\cos\omega)-\frac{l^2\sin^2\omega}{2}=0,$$
$$X^2\sin^2\frac{\omega}{2}-Y^2\cos^2\frac{\omega}{2}-2a\sin\omega\sin\frac{\omega}{2}X=0;$$

d'où, par élimination de Y^2,

$$X^2-2a\cos\frac{\omega}{2}(1+\cos\omega)X-l^2\cos^2\frac{\omega}{2}=0,$$

équation d'où l'on déduirait des résultats analogues à ceux donnés par M. Joffroy dans son article.

Un abonné. — *Au sujet de la surface de Weddle.*

— Au sujet de la surface de Weddle, on peut rappeler que Chasles a traité un problème plus général que la recherche de la surface lieu des sommets des cônes du second ordre qui passent par six points donnés.

Il a examiné le cas (*Comptes rendus*, t. LII, 1861, p. 1157-1162) où les cônes divisent harmoniquement six ou sept segments donnés. Dans le premier cas, le lieu des sommets est une surface du quatrième ordre; dans le second, une courbe gauche du sixième ordre.

Il fait dériver ces propositions du théorème général suivant sur les figures homographiques :

Si l'on a quatre figures homographiques dans l'espace, le lieu d'un point par où passent quatre plans homologues des quatre figures est une surface du quatrième ordre.

F. Balitrand. — *Une propriété des courbes de Ribaucour.* — Les courbes de Ribaucour sont caractérisées, au point de vue géométrique, par la propriété suivante : *Le rayon de courbure en un point quelconque est partagé dans un rapport constant par l'axe des x.*

Analytiquement, cette propriété se traduit par l'équation différentielle

$$(1) \qquad \frac{dp}{dx} = \frac{n}{y}(1+p^2) \qquad \left(p = \frac{dy}{dx},\ n = \text{const.}\right),$$

ou bien

$$\frac{p\,dp}{dy} = \frac{n}{y}(1+p^2), \qquad \frac{p\,dp}{1+p^2} = n\frac{dy}{y};$$

d'où

$$p = \sqrt{\left(\frac{y}{c}\right)^{2n} - 1}.$$

On déduit de là

$$\left(\frac{y}{c}\right)^{2n} = 1 + p^2,$$

et comme en vertu de (1) on a, ρ désignant le rayon de courbure,

$$\rho = \frac{y\sqrt{1+p^2}}{n},$$

on obtient finalement

$$(2) \qquad \rho = \frac{y^{n+1}}{n\,c^n}.$$

Ainsi : *Le rayon de courbure en un point quelconque d'une courbe de Ribaucour est proportionnel à une puissance de l'ordonnée de ce point.*

Cette propriété peut remplacer, parfois avec avantage, la définition habituelle des lignes de Ribaucour; car elle les caractérise, de même que la suivante qui est une conséquence immédiate de ce qui précède.

La normale (partie comprise entre le point d'incidence et l'axe des x) *en un point quelconque d'une ligne de Ribaucour est proportionnelle à une puissance de l'ordonnée de ce point.*

Parmi les courbes célèbres qui font partie de la classe des lignes de Ribaucour, figurent notamment la cycloïde, la chaînette et la parabole pour lesquelles on a respectivement

$$n = -\frac{1}{2}, \qquad \rho^2 = \frac{cy}{4} \qquad \text{(cycloïde)};$$

$$n = 1, \qquad \rho = \frac{y^2}{c} \qquad \text{(chaînette)};$$

$$n = \frac{1}{2}, \qquad \rho^2 = \frac{y^3}{4c^2} \qquad \text{(parabole)}.$$

Différentions l'équation (2), nous obtenons

$$d\rho = \frac{n+1}{n}\,\frac{y^n}{c^n}\,dy.$$

Mais, si s_1 est l'arc de la développée, on a $d\rho = ds_1$ et si y_1 est l'ordonnée du centre de courbure, on trouve facilement que

$$\frac{y}{y_1} = \frac{n}{1-n}.$$

Par suite,

$$ds_1 = \frac{(n+1)\,n^n}{(1-n)^{n+1}}\,\frac{y_1^n}{c^n}\,dy_1;$$

d'où

$$s_1 = \frac{n^n}{(1-n)^{n+1}}\,\frac{y^{n+1}}{c^n}.$$

Les développées des lignes de Ribaucour sont donc caractérisées par cette propriété que *l'arc est proportionnel à une puissance de l'ordonnée*. (*Voir* E. Cesàro, *Nouv. Ann.*, 1914, p. 102.)

E.-N. Barisien. — *Sur le problème de Pappus.* — La remarquable solution de ce problème (**1916**, p. 168-171) m'a suggéré l'idée d'étudier ce problème *lorsque l'angle* XOY *est droit et que le point* P *est en dehors de la bissectrice*. En conservant les notations de M. J. Joffroy (*loc. cit.*), et posant

$$PA = b, \qquad PA' = a, \qquad OS = x, \qquad OS' = y,$$

on a à résoudre les deux équations

(1) $$x^2 + y^2 = l^2,$$

(2) $$xy = bx + ay.$$

Algébriquement, l'élimination de y entre ces deux équations donnera une équation du quatrième degré en x, qui ne se décomposera en deux équations du second degré que si $a = b$.

Géométriquement, si T est le quatrième sommet du rectangle OSTS', on déterminera les quatre points tels que T, par l'intersection du cercle (1) avec l'hyperbole

équilatère (2), facile à construire. Son centre est en P, ses asymptotes sont les droites PA et PA′, et l'hyperbole passe par O. Avec ces données, on peut construire cette hyperbole par points avec toute la précision possible. On projettera sur OX et OY les quatre points d'intersection de (1) et (2) et l'on aura les quatre droites SS′ de longueur l. Comme vérification graphique, ces quatre droites doivent passer par P.

Si les droites OX et OY font entre elles l'angle ω, on aura à résoudre les deux équations

$$(3) \qquad x^2+y^2-2xy\cos\omega=l^2,$$

$$(4) \qquad xy=bx+ay,$$

ou à construire l'intersection de l'ellipse (3) avec l'hyperbole équilatère (4).

E.-N. Barisien. — *Sur des décompositions de certains nombres en sommes de carrés.* — On sait, par les identités de Lagrange, décomposer tout nombre N de la forme

$$N=(a^2+b^2)(c^2+d^2)(a^2c^2+b^2d^2)$$

en somme de deux carrés (de douze façons) et en somme de quatre carrés (de six façons), ainsi qu'en une somme de huit carrés.

1° Voici deux décompositions de N en somme de trois carrés

$$(1) \quad N=[ab(c^2\mp d^2)]^2+[cd(a^2\pm b^2)]^2+(a^2c^2+b^2d^2)^2.$$

2° On a de même pour le nombre N′

$$N'=(a^2+b^2)(c^2+d^2)(a^2d^2+b^2c^2),$$

$$(2) \quad N'=[ab(c^2\mp d^2)]^2+[cd(a^2\pm b^2)]^2+(a^2d^2+b^2c^2)^2.$$

3° Il résulte de là en faisant le produit des formules (1)

et (2) que si $N'' = NN'$, *tout nombre* N'' *de la forme*

$$N'' = (a^2 + b^2)^2 (c^2 + d^2)^2 (a^2 c^2 + b^2 d^2)(a^2 d^2 + b^2 c^2)$$

est de quatre façons différentes une somme de neuf carrés.

Dans deux de ces décompositions, deux des neuf carrés sont des bicarrés.

Je signale cette curieuse décomposition du nombre N'' qui est peut-être inédite. En tout cas, sa démonstration directe semble devoir être assez ardue si l'on ne connaît pas les formules (1) et (2).

ANCIENNES QUESTIONS NON RÉSOLUES.

Questions de Cesàro.

1402 (**1882**, 240). — La somme des $p^{\text{ièmes}}$ puissances des diviseurs de n est égale, en moyenne, à

$$n^p\left(1 + \frac{1}{2^{p+1}} + \frac{1}{3^{p+1}} + \ldots\right).$$

1403 (**1882**, 240). — $a, b, c, \ldots$ étant les diviseurs de n, on a, en moyenne,

$$\frac{p}{a+p} + \frac{p}{b+p} + \frac{p}{c+p} + \ldots = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{p}.$$

1433 (**1883**, 144) [1]. — 1° Il n'y a que dix-huit espèces de

---

[1] Cette question ne figurait pas dans les listes des questions non résolues publiées récemment. Mais comme nous n'avons pu, malgré nos recherches, retrouver aucune trace d'une solution publiée, il nous a semblé opportun d'en reproduire ici l'énoncé.

polyèdres aux sommets desquels les faces de même ordre concourent en même nombre.

2° Il n'y a que dix-huit espèces de polyèdres, dont chaque face contient les sommets de même ordre en même nombre.

3° Ces polyèdres sont les seuls susceptibles de devenir réguliers ou semi-réguliers.

1438 (**1883**, 239). — La différence entre le nombre des diviseurs impairs et le nombre des diviseurs pairs d'un nombre entier est égale, en moyenne, à $l2$.

1439 (**1883**, 239). — Le nombre des diviseurs de n est égal, en moyenne, à ln.

1440 (**1883**, 239). — La somme des inverses des $p^{\text{ièmes}}$ puissances des diviseurs de n est égale, en moyenne, à

$$1 + \frac{1}{2^{p+1}} + \frac{1}{3^{p+1}} + \ldots$$

1441 (**1883**, 239). — Soient $a, b, c, \ldots$ les diviseurs de n. La somme

$$\frac{a}{p^a} + \frac{b}{p^b} + \frac{c}{p^c} + \ldots$$

est égale, en moyenne, à $\dfrac{1}{p-1}$.

1442 (**1883**, 239). — $f(n)$ étant la somme des restes du nombre entier n, divisé par tous les nombres entiers qui le précèdent, on a

$$\lim \frac{f(n)}{n^2} = 1 - \frac{\pi^2}{12}.$$

1443 (**1883**, 240). — La somme des $p^{\text{ièmes}}$ puissances des diviseurs de n est égale, en moyenne, à αn^p. La constante α est comprise entre $\dfrac{1}{p}$ et $\dfrac{1}{p} + 1$. Déterminer sa valeur.

1444 (**1883**, 240). — On a

$$f(1)-f(3)+f(5)-\ldots\pm f(2n-1)$$
$$=\pm\frac{1}{2}f(\varepsilon+2n)+\text{const.},$$
$$f(2)-f(4)+f(6)-\ldots\pm f(2n)$$
$$=\pm\frac{1}{2}f(\varepsilon+2n+1)+\text{const.},$$

pourvu qu'on remplace les puissances de ε par les nombres d'Euler correspondants, définis par la relation symbolique

$$(\varepsilon+1)^p+(\varepsilon-1)^p=0 \qquad (p=1,\ 2,\ 3,\ \ldots).$$

1445 (**1883**, 240). — 1° La somme des produits m à m des n premiers nombres naturels est divisible par tous les nombres premiers compris entre $m+1$ et $n+2$, et supérieurs à $n-m$;

2° La même somme, diminuée de $1.2.3\ldots, m$, est divisible par $n-m$, si ce nombre est premier.

1446 (**1883**, 240). — Les nombres de Bernoulli et d'Euler, définis symboliquement par les relations

$$(B+1)^p-B^p=0,$$
$$(\varepsilon+1)^p+(\varepsilon-1)^p=0,$$

satisfont aux relations symboliques

$$(2B+1)^p=(2-2^p)B_p,$$
$$(4B+1)^p=(2-2^p)B_p-p\,\varepsilon_{p-1},$$
$$(4B+3)^p=(2-2^p)B_p+p\,\varepsilon_{p-1}.$$

1447 (**1883**, 287). — Soient $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ des valeurs positives de $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ satisfaisant à l'équation de coefficients positifs

$$A_1x_1+A_2x_2+A_3x_3+\ldots+A_nx_n=1.$$

La probabilité que $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ soient respectivement supérieurs à $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_n$ est exprimée par la $(n-1)^{\text{ième}}$ puissance de

$$1-(A_1\alpha_1+A_2\alpha_2+A_3\alpha_3+\ldots+A_n\alpha_n).$$

1486 (**1884**, 160). — La probabilité que la conique déterminée par cinq points, pris au hasard dans un plan, soit une ellipse, est infiniment petite.

1511 (**1884**, 496). — On donne au hasard, dans un plan, quatre points, et l'on en prend un comme centre d'une conique passant par les trois autres. Démontrer que cette conique est, avec autant de probabilité, une ellipse ou une hyperbole.

1522 (**1885**, 56). — Le déterminant de $(n-1)^2$ éléments, dont l'élément général u_{ij} est égal *au nombre des diviseurs communs de* $i+1$, $j+1$, représente la *totalité des entiers, non supérieurs à* n, *dépourvus de diviseurs carrés*, *autres que l'unité.*

1523 (**1885**, 104). — Soit $\left[f(x)\right]_{x_1}^{x_2}$ l'expression de l'aire comprise entre un arc de courbe, l'axe des abscisses et les ordonnées extrêmes. A l'arc de courbe on inscrit une ligne polygonale, dont tous les côtés ont, sur l'axe des abscisses, des projections égales à ε. L'expression de l'aire comprise entre cette ligne, l'axe des abscisses et les ordonnées extrêmes est

$$\frac{1}{2}\left[f(x+\mathrm{B}\varepsilon)+f(x-\mathrm{B}\varepsilon)\right]_{x_1}^{x_2},$$

pourvu qu'on remplace les puissances de B par les nombres de Bernoulli correspondants.

1629 (**1892**, 14*). — Soit B le centre de la sphère osculatrice, en A, à la ligne (A). Soit C le centre de la sphère osculatrice, en B, à la ligne (B). Démontrer que AC engendre une surface développable, et chercher les lignes pour lesquelles AC pivote autour d'un point fixe.

1631 (**1892**, 14*). — Chercher les courbes telles que les plans polaires de leurs points, par rapport à une sphère donnée, passent par les centres des sphères osculatrices correspondantes.

Note de la Rédaction. — Beaucoup des énoncés qui

précèdent semblent se rattacher aux travaux publiés par l'auteur dans les *Mémoires de la Société royale des Sciences de Liége* sous le titre « Sur diverses questions d'arithmétique ». Son livre « Excursions arithmétiques à l'infini » traite aussi de sujets analogues. Il est profondément à regretter que l'auteur n'ait pas accompagné l'envoi de ses questions de solutions, au moins indiquées. Il faut souhaiter que cette leçon du passé soit profitable à l'avenir, et qu'on ne laisse pas transformer en rébus indéchiffrables des questions qui auraient pu constituer d'utiles problèmes instructifs.

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES.

1364.

(1881, p. 380 et 528.)

1° *Les équations réciproques telles que, en posant* $x = 2t$, *leurs transformées soient également réciproques, peuvent se mettre sous la forme*

$$F[(x+1)^4, (x-1)^4] = 0,$$

F *désignant une fonction entière et homogène de* $(x+1)^4$ *et* $(x-1)^4$.

On suppose que l'équation proposée n'admet pas pour racine $+1$ *ou* -1.

2° *Les équations réciproques telles que, en posant*

$$x + \frac{1}{x} = t,$$

leurs transformées soient également réciproques, peuvent se mettre sous la forme

$$(x^2+x+1)^n (x^2-x+1)^{n'} \times F[(x^2+x+1)^2, (x^2-x+1)^2] = 0,$$

F *désignant une fonction entière et homogène des quantités* $(x^2+x+1)^2$, $(x^2-x+1)^2$.

PELLET.

SOLUTION

Par L'AUTEUR.

Cette question, insérée au Tome XX de la 2e série, p. 380, a été rectifiée dans son énoncé, page 528, même Tome.

$F(x) = 0$ étant une équation réciproque, n'ayant pas de racine égale à $+1$ ou à -1, si l'on effectue la transformation $x = \frac{d+y}{d-y}$, l'équation en y est paire, puisque le changement de y en $-y$, transforme x en $\frac{1}{x}$. Cette remarque donne immédiatement la solution de la question.

Si en posant $x + \frac{1}{x} = 2t$, l'équation en t est réciproque, la transformée par la substitution $t = \frac{1+y}{1-y}$ est paire, $F_1(y^2) = 0$; remplaçant y par sa valeur

$$\frac{t-1}{t+1} = \frac{x^2+1-2x}{x^2+1+2x} = \frac{(x-1)^2}{(x+1)^2},$$

et multipliant par une puissance convenable de $(x+1)^2$, on voit que $F(x)$ doit être une fonction homogène de $(x+1)^4$ et $(x-1)^4$.

Si, en posant $x + \frac{1}{x} = t$, l'équation en t est réciproque, alors

$$\frac{t-1}{t+1} = \frac{x^2+1-x}{x^2+1+x},$$

et l'équation $F(x) = 0$ peut se mettre sous la forme

$$(x^2+x+1)^n (x^2-x+1)^{n'} \times F_1[(x^2+x+1)^2, (x^2-x+1)^2] = 0,$$

F_1 désignant une fonction entière et homogène de

$$(x^2+x+1)^2 \quad \text{et} \quad (x^2-x+1)^2.$$

1871 [1].

(1900, p. 432.)

Étant donnés, dans un plan, un cercle C^2 *ayant le centre* O *et un cercle-point non situé sur* C^2, *prenons sur le rayon qui unit* O *avec le point variable* P *de* C^2, *le conjugué harmonique de* P *par rapport au cercle-point ; le lieu de* P′ *est une courbe de Jérabek ; construire la tangente au point* P′, *les tangentes au point double, les tangentes doubles, l'intersection de la courbe avec une droite.*

V. Retali.

Solution

Par un Abonné [2].

Soit A le cercle-point ; c'est-à-dire l'ensemble des deux droites isotropes issues de A. Les droites AP et AP′ étant conjuguées harmoniques par rapport aux droites isotropes sont rectangulaires ; donc le lieu de P′ est défini de la façon suivante : soient P un point d'une circonférence C^2 de centre O ; A un point fixe de son plan ; AP′ une perpendiculaire à la droite AP et P′ le point d'intersection de AP′ et OP ; trouver le lieu de P′. Ce lieu est une courbe de Jérabek (*voir* Gomès Teixeira, *Courbes spéciales remarquables*, t. I, p. 317).

Prenons deux axes rectangulaires ayant pour origine le point O ; l'axe des x passant en A. Désignons OA par h et soient x, y les coordonnées de P ; X, Y celles de P′. Les équations des droites OP et AP′ sont :

$$Xy - Yx = 0, \tag{1}$$

$$X(h-x) - Yy - h(h-x) = 0. \tag{2}$$

---

(1) Numérotée 1859 par erreur.

(2) Les solutions aux questions 1871, 1872 nous avaient été adressées simultanément. Les nécessités de la mise en pages ont conduit à publier d'abord 1872 (p. 335-336). L'auteur renvoie, vers la fin, à la solution 1871, qu'il supposait devoir être publiée précédemment. Il nous suffit d'attirer sur ce point l'attention du lecteur. La Rédaction.

On en déduit

$$(3)\qquad X = \frac{hx(x-h)}{x^2+y^2-hx}, \qquad Y = \frac{hy(x-h)}{x^2+y^2-hx}.$$

Les équations (1) et (2) étant symétriques en x, X, y, Y, on a de même

$$(4)\qquad x = \frac{hX(X-h)}{X^2+Y^2-hX}, \qquad y = \frac{hY(X-h)}{X^2+Y^2-hX}.$$

Telles sont les formules qui lient les coordonnées des points correspondants P et P′. Si le point P décrit le cercle qui a pour équation

$$x^2+y^2-a^2=0,$$

le point P′ décrit la courbe

$$(5)\qquad h^2(X^2+Y^2)(X-h)^2-a^2(X^2+Y^2-hX)^2=0.$$

Pour construire la tangente au point P′ à cette courbe, il suffit d'appliquer le théorème de Frégier à l'angle droit PAP′, mobile autour de son sommet A ; en observant que le point de Frégier est le centre O du cercle C^2. On voit ainsi que la normale en A à l'axe Ox, la tangente en P au cercle C^2 et la tangente en P′ à (5) coupent les côtés opposés du triangle PAP′ en trois points en ligne droite ; ce qui suffit à déterminer cette dernière tangente.

Le point O est un point double de la courbe et les tangentes en ce point ont pour équation

$$(a^2-h^2)X^2-h^2Y^2=0.$$

Ce sont les droites qui joignent le centre O aux points d'intersection du cercle C^2 et de la normale en A à Ox. Ces droites sont donc réelles quand cette normale coupe le cercle C^2 ; c'est-à-dire quand le point A est intérieur au cercle. Dans ce cas le point double O est réel ; dans le cas contraire il est isolé.

Pour trouver les tangentes doubles de (5), prenons une droite quelconque

$$(6)\qquad uX+vY-1=0,$$

et appliquons-lui les formules (3). Elle se transforme en une conique qui a pour équation

$$(7) \qquad h(x-h)(ux+vy)-(x^2+y^2-hx)=0;$$

tandis que (5) elle-même se transforme dans le cercle C^2. Si la droite est bitangente à la courbe, la conique est bitangente à C^2. Comme elle passe à l'origine ainsi qu'au point A où elle est normale à Ox, on est ramené au problème suivant : « Construire une conique qui ait un double contact avec un cercle donné, qui passe par le centre O de ce cercle et par le point A, situé sur Ox, et admettant Ox comme normale en ce point. » Voici comment il peut être résolu.

L'équation d'une conique ayant un double contact avec la circonférence

$$x^2+y^2-a^2=0,$$

et passant par le centre de cette courbe, est

$$x^2+y^2-a^2+(\alpha x+\beta y-a)^2=0.$$

Faisons-y $x=h$ et exprimons que l'équation en y a deux racines nulles, nous obtenons

$$\beta(\alpha h-a)=0, \qquad h^2(1+\alpha^2)-2a\alpha h=0.$$

La condition $\alpha h-a=0$ conduit à $h=\pm a$ et doit être rejetée. Il reste donc les conditions

$$\beta=0, \qquad \alpha=\frac{a\pm\sqrt{a^2-h^2}}{h}.$$

On voit ainsi que la corde de contact est parallèle à Oy et passe par le point d'abscisse

$$x=\frac{ah}{a\pm\sqrt{a^2-h^2}};$$

ce qui suffit à la déterminer.

La courbe (5) étant du quatrième degré, la construction des points où elle rencontre une droite arbitraire de son plan est impossible avec la règle et le compas. On peut ramener cette construction à celle des points communs à une conique et au cercle C^2 ; mais il faut bien remarquer que c'est remplacer un problème insoluble par un autre qui ne l'est pas moins. Toutefois, comme c'est probablement la solution envisagée

par l'auteur de la question, nous allons l'exposer rapidement.

La droite (6) se transforme par les formules (3) en la conique (7). Celle-ci passe en A où elle est normale à Ox; à l'origine où elle a pour tangente la droite

$$(1 - hu)x - hvy = 0;$$

c'est-à-dire la droite qui va de l'origine au point de rencontre de la droite donnée avec la normale en A à Ox. Enfin la conique passe par le point d'intersection du cercle décrit sur OA comme diamètre avec la parallèle à la droite donnée, menée par l'origine. Elle est donc déterminée et ses points d'intersection avec C^2 correspondent aux points de rencontre de la droite avec (5); c'est-à-dire aux points cherchés.

QUESTIONS.

2294. Enveloppe du plan d'un triangle ABC, variable, dont les sommets décrivent les arêtes d'un trièdre, de façon que le point de contact du plan avec son enveloppe soit toujours au centre de gravité de masses m_1, m_2, m_3 placées aux sommets A, B, C.

A. Pellet.

2295. La somme des carrés, la somme des cubes, la somme des quatrièmes puissances des n premiers nombres impairs sont données par les formules suivantes :

$$S_2 = \frac{(2n-1)2n(2n+1)}{1.2.3.},$$
$$S_3 = S_1 \times (2n^2 - 1),$$
$$5S_4 = S_2 \times (12n^2 - 7):$$

pour $n = 5k \pm 1$, S_4 est divisible par S_2.

G. Fontené.

ERRATUM.

1916, page 325, ligne 15, *au lieu de* l'axe, *lire* l'une.

[I 19a]

SUR CERTAINS SYSTÈMES D'ÉQUATIONS INDÉTERMINÉES DU SECOND DEGRÉ ;

Par M. R. GOORMAGHTIGH.

M. Gérardin a proposé, dans *l'Intermédiaire des Mathématiciens*, l'étude des systèmes d'équations indéterminées

$$(y-x)^2+x=A^2,$$
$$(y-x)^2-y=B^2;$$

$$(x+y+z)^2\pm x=A^2,$$
$$(x+y+z)^2\pm y=B^2,$$
$$(x+y+z)^2\pm z=C^2;$$

$$(x+y+z)^2-(x+y)=A^2,$$
$$(x+y+z)^2-(y+z)=B^2,$$
$$(x+y+z)^2-(x+z)=C^2;$$

$$(x+y+z+t)^2-(x+y+z)=A^2,$$
$$(x+y+z+t)^2-(x+y+t)=B^2,$$
$$(x+y+z+t)^2-(x+z+t)=C^2,$$
$$(x+y+z+t)^2-(y+z+t)=D^2 \quad (^1).$$

Nous nous proposons d'étudier ici ces deux systèmes généraux, que nous désignerons par I_n et II_n :

$$(x_1+x_2+\ldots+x_{n-1}+x_n)^2+x_1 \quad = X_1,$$
$$(x_1+x_2+\ldots+x_{n-1}+x_n)^2+x_2 \quad = X_2,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$
$$(x_1+x_2+\ldots+x_{n-1}+x_n)^2+x_{n-1} = X_{n-1},$$
$$(x_1+x_2+\ldots+x_{n-1}+x_n)^2+x_n \quad = X_n$$

(1) Pour les énoncés de ces questions, voir *l'Intermédiaire des Mathématiciens*, question 4551, 1915, p. 193 ; questions 4560 et 4561, 1915, p. 197 ; question 4576, 1915, p. 221 ; question 4586, 1915, p. 245.

et

$$\begin{array}{l}
(x_1+x_2+\ldots+x_{n-1}+x_n)^2-(x_2+x_3+\ldots+x_{n-1}+x_n\quad)=X_1,\\
(x_1+x_2+\ldots+x_{n-1}+x_n)^2-(x_1+x_3+\ldots+x_{n-1}+x_n\quad)=X_2,\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
(x_1+x_2+\ldots+x_{n-1}+x_n)^2-(x_1+x_2+\ldots+x_{n-2}+x_n\quad)=X_{n-1},\\
(x_1+x_2+\ldots+x_{n-1}+x_n)^2-(x_1+x_2+\ldots+x_{n-2}+x_{n-1})=X_n,
\end{array}$$

qui admettent les précédents comme cas particuliers. Nous indiquerons une méthode qui permet de trouver toutes leurs solutions entières et dont on peut déduire des formules très générales. En outre, au moyen de cette méthode, on peut toujours trouver des solutions de ces systèmes pour lesquelles $n-1$ des inconnues $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ont des signes donnés d'avance ([1]).

Étude du système I_n.

1. Si l'on pose

$$x_1+x_2+\ldots+x_{n-1}+x_n=t,$$

et si l'on ajoute les équations membres à membres, on voit que la résolution du système revient à celle de l'équation

$$(1)\qquad nt^2+t=X_1^2+X_2^2+\ldots+X_{n-1}^2+X_n^2.$$

On a alors

$$(2)\qquad \begin{cases} x_1=X_1^2-t^2, \quad x_2=X_2^2-t^2, \quad \ldots, \\ x_{n-1}=X_{n-1}^2-t^2, \quad x_n=X_n^2-t^2. \end{cases}$$

([1]) Ainsi, pour le système II_4, M. Gérardin a signalé (*Intermédiaire*, 1915, p. 221) de nombreuses solutions numériques pour lesquelles deux au plus des inconnues x_1, x_2, x_3, x_4 sont positives, et a demandé si *trois* de ces inconnues peuvent être positives. Il résulte de la méthode que nous indiquons que, pour les deux systèmes étudiés, $n-1$ des inconnues $x_1, x_2, \ldots, x_n$ peuvent être positives, quel que soit n.

Posons

$$(3) \quad X_1 = t + p_1, \quad X_2 = t + p_2, \quad \ldots, \quad X_{n-1} = t + p_{n-1};$$

on voit que, suivant que t sera positif ou négatif, les inconnues $x_1, x_2,, \ldots, x_{n-1}$ auront respectivement les mêmes signes que $p_1, p_2, \ldots, p_{n-1}$ ou les signes contraires. Dans ce qui suit, nous désignerons par Σp et Σp^2 la somme des nombres $p_1, p_2, \ldots, p_{n-1}$ et celle de leurs carrés.

Si l'on porte les valeurs (3) dans l'équation (1), on obtient

$$t^2 - (2\Sigma p - 1)t - \Sigma p^2 - X_n^2 = 0,$$

d'où l'on déduit

$$t = \frac{1}{2}\left[2\Sigma p - 1 \pm \sqrt{(2\Sigma p - 1)^2 + 4\Sigma p^2 + 4X_n^2}\right].$$

Or, le nombre

$$N = (2\Sigma p - 1)^2 + 4\Sigma p^2$$

est de la forme $4m + 1$, pour toutes les valeurs des nombres p. Soit donc $N = a.b$; les nombres a et b sont tous deux de la forme $4m - 1$ ou tous deux de la forme $4m + 1$. Par suite, N est la différence de deux carrés dont le plus petit est pair; ce sont les carrés de

$$\frac{1}{2}(a + b), \qquad \frac{1}{2}(a - b).$$

On a donc

$$X_n = \frac{1}{4}(a - b),$$

$$t = \frac{1}{2}\left[2\Sigma p - 1 \pm \frac{1}{2}(a + b)\right] = \Sigma p \pm \frac{1}{4}(a + b \mp 2),$$

et, suivant qu'on prend les signes supérieurs ou inférieurs, t est positif ou négatif.

Si l'on remarque en outre que, d'après les relations

(2) et (3), on a

$$x_1 = 2p_1 t + p_1^2, \qquad x_2 = 2p_2 t + p_2^2, \qquad \ldots,$$
$$x_{n-1} = 2p_{n-1} t + p_{n-1}^2,$$

on déduira aisément de ce qui précède le résultat suivant :

Ayant choisi $n-1$ nombres quelconques p_1, p_2, ..., p_{n-1}, on décompose le nombre

$$N = (2\Sigma p - 1)^2 + 4\Sigma p^2$$

en un produit de deux facteurs a et b; on aura alors des solutions du système I_n en prenant

$$(4)\quad \left\{ \begin{aligned} x_1 &= p_1 \left[2\Sigma p + p_1 \pm \frac{1}{2}(a + b \mp 2) \right], \\ x_2 &= p_2 \left[2\Sigma p + p_2 \pm \frac{1}{2}(a + b \mp 2) \right], \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ x_{n-1} &= p_{n-1} \left[2\Sigma p + p_{n-1} \pm \frac{1}{2}(a + b \mp 2) \right], \\ -x_n &= \left[\Sigma p \pm \frac{1}{4}(a + b \mp 2) \right](2\Sigma p - 1) + \Sigma p^2, \\ X_1 &= p_1 + \Sigma p \pm \frac{1}{4}(a + b \mp 2), \\ X_2 &= p_2 + \Sigma p \pm \frac{1}{4}(a + b \mp 2), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ X_{n-1} &= p_{n-1} + \Sigma p \pm \frac{1}{4}(a + b \mp 2), \\ X_n &= \frac{1}{4}(a - b). \end{aligned} \right.$$

Suivant qu'on prend dans ces formules les signes supérieurs ou les signes inférieurs là où figurent les doubles signes, les valeurs des inconnues x_1, x_2, ..., x_{n-1} auront les mêmes signes que les nombres p_1, p_2, ..., p_{n-1}, ou les signes contraires.

Chaque groupe de $n-1$ nombres p quelconques donnera lieu, pour le système I_n, à plusieurs solutions

dont le nombre dépend de la décomposition de N en facteurs.

2. Le résultat que nous venons de trouver conduit immédiatement à des formules très générales renfermant $n-1$ paramètres et donnant des solutions du système I_n; prenons, en effet, pour facteurs a et b le nombre N et l'unité. Un calcul simple montre qu'en employant dans (4) les signes supérieurs là où figurent les doubles signes, on a alors les formules générales suivantes :

$$(5)\quad \left\{\begin{aligned}
x_1 &= p_1[2(\Sigma p)^2 + 2\Sigma p^2 + p_1],\\
x_2 &= p_2[2(\Sigma p)^2 + 2\Sigma p^2 + p_2],\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
x_{n-1} &= p_{n-1}[2(\Sigma p)^2 + 2\Sigma p^2 + p_{n-1}],\\
-x_n &= [(\Sigma p)^2 + \Sigma p^2](2\Sigma p - 1) + \Sigma p^2,\\
X_1 &= (\Sigma p)^2 + \Sigma p^2 + p_1,\\
X_2 &= (\Sigma p)^2 + \Sigma p^2 + p_2,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
X_{n-1} &= (\Sigma p)^2 + \Sigma p^2 + p_{n-1},\\
X_n &= (\Sigma p)^2 + \Sigma p^2 - \Sigma p.
\end{aligned}\right.$$

Si, au contraire, on adopte dans (4) les signes inférieurs là où il y a des doubles signes, on trouve les formules

$$(6)\quad \left\{\begin{aligned}
x_1 &= -p_1[2(\Sigma p)^2 + 2\Sigma p^2 - 4\Sigma p - p_1 + 2],\\
x_2 &= -p_2[2(\Sigma p)^2 + 2\Sigma p^2 - 4\Sigma p - p_2 + 2],\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
x_{n-1} &= -p_{n-1}[2(\Sigma p)^2 + 2\Sigma p^2 - 4\Sigma p - p_{n-1} + 2],\\
x_n &= [(\Sigma p)^2 + \Sigma p^2 - 2\Sigma p + 1](2\Sigma p - 1) - \Sigma p^2,\\
X_1 &= (\Sigma p)^2 + \Sigma p^2 - 2\Sigma p - p_1 + 1,\\
X_2 &= (\Sigma p)^2 + \Sigma p^2 - 2\Sigma p - p_2 + 1,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
X_{n-1} &= (\Sigma p)^2 + \Sigma p^2 - 2\Sigma p - p_{n-1} + 1,\\
X_n &= (\Sigma p)^2 + \Sigma p^2 - \Sigma p.
\end{aligned}\right.$$

On déduit de (6) des formules très simples si l'on choisit des *nombres p dont la somme est nulle* [1]; on trouve

$$(7)\quad \left\{\begin{aligned} x_1 &= -p_1(2\Sigma p^2 - p_1 + 2),\\ x_2 &= -p_2(2\Sigma p^2 - p_2 + 2),\\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots,\\ x_{n-1} &= -p_{n-1}(2\Sigma p^2 - p_{n-1} + 2),\\ x_n &= -(2\Sigma p^2 + 1),\\ X_1 &= \Sigma p^2 - p_1 + 1,\\ X_2 &= \Sigma p^2 - p_2 + 1,\\ &\dots\dots\dots\dots,\\ X_{n-1} &= \Sigma p^2 - p_{n-1} + 1,\\ X_n &= \Sigma p^2. \end{aligned}\right.$$

Comme applications des résultats qui précèdent nous traiterons les cas de trois et de quatre équations, en donnant pour chaque formule quelques exemples numériques simples.

3. *Équation* I_2. — Pour $n = 2$, le système considéré devient

$$(x_1 + x_2)^2 + x_1 = X_1^2,$$
$$(x_1 + x_2)^2 + x_2 = X_2^2.$$

On a alors

$$N = a.b = (2p_1 - 1)^2 + 4p_1^2,$$

et les formules (4) s'écrivent

$$(8)\quad \left\{\begin{aligned} x_1 &= p_1\left[3p_1 \pm \frac{1}{2}(a + b \mp 2)\right],\\ -x_2 &= \left[p_1 \pm \frac{1}{4}(a + b \mp 2)\right](2p_1 - 1) + p_1^2,\\ X_1 &= 2p_1 \pm \frac{1}{4}(a + b \mp 2),\\ X_2 &= \frac{1}{4}(a - b). \end{aligned}\right.$$

---

[1] Si l'on introduit cette même hypothèse dans les formules (5) on obtient des solutions dans lesquelles x_n est nul pour toutes valeurs des nombres p, quel que soit n.

Ainsi, pour $p_1 = -3$, on a

$$N = 85, \qquad a = 17, \qquad b = 5,$$

et l'on obtient la solution

$$x_1 = 63, \qquad x_2 = -72, \qquad X_1 = 12, \qquad X_2 = 3;$$

pour $p_1 = -4$, on a

$$N = 145, \qquad a = 29, \qquad b = 5,$$

d'où l'on déduit

$$x_1 = 120, \qquad x_2 = -133, \qquad X_1 = 17, \qquad X_2 = 6;$$

pour $p_1 = -5$, on trouve

$$N = 221, \qquad a = 17, \qquad b = 13,$$

et l'on a

$$x_1 = 155, \qquad x_2 = -168, \qquad X_1 = 18, \qquad X_2 = 1.$$

D'autre part, les formules (5) deviennent ici

$$\begin{aligned} x_1 &= p_1^2(4p_1 + 1), & X_1 &= p_1(2p_1 + 1), \\ x_2 &= -p_1^2(4p_1 - 1), & X_2 &= p_1(2p_1 - 1); \end{aligned}$$

elles donnent, par exemple, pour $p = 1$,

$$x_1 = 5, \qquad x_2 = -3, \qquad X_1 = 3, \qquad X_2 = 1;$$

pour $p_1 = 2$,

$$x_1 = 36, \qquad x_2 = -28, \qquad X_1 = 10, \qquad X_2 = 6;$$

pour $p_1 = 3$,

$$x_1 = 117, \qquad x_2 = -99, \qquad X_1 = 21, \qquad X_2 = 15.$$

De (6) on déduit encore ces formules donnant des solutions du système I_2 :

$$\begin{aligned} x_1 &= -p_1(4p_1^2 - 5p_1 + 2), & X_1 &= 2p_1^2 - 3p_1 + 1, \\ x_2 &= 4p_1^3 - 7p_1^2 + 4p_1^2 - 1, & X_2 &= p_1(2p_1 - 1). \end{aligned}$$

Ainsi, on trouve, pour $p_1 = -1$,

$$x_1 = 11, \qquad x_2 = -16, \qquad X_1 = 6, \qquad X_2 = 3;$$

pour $p_1 = -2$,

$$x_1 = 56, \qquad x_2 = -69, \qquad X_1 = 15, \qquad X_2 = 10;$$

pour $p_1 = -3$,

$$x_1 = 159, \qquad x_2 = -184, \qquad X_1 = 28, \qquad X_2 = 21.$$

Des formules (8) on peut encore déduire des formules générales en prenant pour p_1 une fonction d'un paramètre h, telle que le nombre N correspondant soit une fonction de h décomposable en un produit de deux facteurs. Soit, par exemple, $p_1 = 1 - 5h$; on a alors successivement

$$N = 200h^2 - 60h + 5, \qquad a = 5, \qquad b = 40h^2 - 12h + 1,$$

et l'on obtient ces formules

$$x_1 = -100h^3 + 125h^2 - 46h + 5, \qquad X_1 = 10h^2 - 13h + 3,$$
$$x_2 = 100h^3 - 115h^2 + 38h - 3, \qquad X_2 = 10h^2 - 3h - 1.$$

Posons encore

$$p_1 = 2h^4 + h^3 - 3h^2 + 2;$$

on a alors

$$\begin{aligned} N &= 32h^8 + 32h^7 - 88h^6 - 48h^5 + 128h^4 + 28h^3 - 84h^2 + 25 \\ &= (8h^4 - 10h^2 + 2h + 5)(4h^4 + 4h^3 - 6h^2 - 2h + 5), \end{aligned}$$

et, par suite,

$$a = 8h^4 - 10h^2 + 2h + 5,$$
$$b = 4h^4 + 4h^3 - 6h^2 - 2h + 5,$$

d'où

$$x_1 = \quad 2h^7 - h^6 - 4h^5 + 3h^4 + 2h^3 - 2h^2,$$
$$x_2 = -2h^7 + h^6 + 4h^5 - 4h^4 - 2h^3 + 3h^2 - 1,$$
$$X_1 = h^4 + h^3 - 2h^2 + 1,$$
$$X_2 = h^4 - h^3 - \quad h^2 + h;$$

on retrouve donc une formule de M. Gérardin [1].

4. *Système* I_3. — Dans le cas où $n = 3$, le système I_n s'écrit

$$(x_1 + x_2 + x_3)^2 + x_1 = X_1^2,$$
$$(x_1 + x_2 + x_3)^2 + x_2 = X_2^2,$$
$$(x_1 + x_2 + x_3)^2 + x_3 = X_1^3.$$

On a dans ce cas

$$N = a.b = 8(p_1^2 + p_2^2 + p_1 p_2) - 4(p_1 + p_2) + 1,$$

et les formules (4) prennent la forme

$$(9)\quad \begin{cases} x_1 = p_1\left[3p_1 + 2p_2 \pm \frac{1}{2}(a + b \mp 2)\right], \\ x_2 = p_2\left[2p_1 + 3p_2 \pm \frac{1}{2}(a + b \mp 2)\right], \\ -x_3 = \left[p_1 + p_2 \pm \frac{1}{4}(a + b \mp 2)\right](2p_1 + 2p_2 - 1) + p_1^2 + p_2^2; \\ X_1 = 2p_1 + \quad p_2 \pm \frac{1}{4}(a + b \mp 2), \\ X_2 = \quad p_1 + 2p_2 \pm \frac{1}{4}(a + b \mp 2), \\ X_3 = \frac{1}{4}(a - b). \end{cases}$$

Prenons, par exemple, $p_1 = 5$, $p_2 = -4$; on a alors $N = 165$, d'où $a = 15$, $b = 11$. On trouve ainsi

$$x_1 = 95, \quad x_2 = -40, \quad x_3 = -48, \quad X_1 = 12, \quad X_2 = 3, \quad X_3 = 1.$$

---

(1) *Intermédiaire des Mathématiciens*, question 4551, 1915, p. 193.

Avec les mêmes valeurs de p_1 et p_2, on peut encore prendre $a = 33$, $b = 5$. On en déduit ces deux solutions

$$\begin{array}{lll} x_1 = 125, & x_2 = -64, & x_3 = -51, \\ X_1 = 15, & X_2 = 6, & X_3 = 7; \\ x_1 = -65, & x_2 = 88, & x_3 = -32, \\ X_1 = 4, & X_2 = 13, & X_3 = 7. \end{array}$$

De même, avec $p_1 = 2$, $p_2 = 1$, on a $N = 45$ et, par suite, les deux décompositions $a = 9$, $b = 5$ et $a = 15$, $b = 3$; on obtient

$$\begin{array}{llllll} x_1 = 28, & x_2 = 13, & x_3 = -35, & X_1 = 8, & X_2 = 7, & X_3 = 1; \\ x_1 = 32, & x_2 = 15, & x_2 = -40, & X_1 = 9, & X_2 = 8, & X_3 = 3. \end{array}$$

Posons encore $p_1 = 5$, $p_2 = -1$; on trouve

$$N = 153,$$

d'où

$$a = 17, \quad b = 9 \quad \text{ou} \quad a = 51, \quad b = 3.$$

On en déduit ces solutions :

$$\begin{array}{lll} x_1 = 125, & x_2 = -19, & x_3 = -96, \\ X_1 = 15, & X_2 = 9, & X_3 = 2; \\ x_1 = 195, & x_2 = -33, & x_3 = -145, \\ X_1 = 22, & X_2 = 16, & X_3 = 12; \\ x_1 = -75, & x_2 = -21, & x_3 = 44, \\ X_1 = 5, & X_2 = 11, & X_3 = 12. \end{array}$$

Si $p_1 = -p_2 = p$, on a $N = 8p^2 + 1$, et les formules (9) s'écrivent

$$x_1 = p\left[p \pm \frac{1}{2}(a + b \mp 2)\right], \qquad X_1 = p \pm \frac{1}{4}(a + b \mp 2),$$

$$x_2 = p\left[p \mp \frac{1}{2}(a + b \mp 2)\right], \qquad X_2 = -p \pm \frac{1}{4}(a + b \mp 2),$$

$$x_3 = \pm \frac{1}{4}(a + b \mp 2) - 2p^2, \qquad X_3 = \frac{1}{4}(a - b).$$

Ainsi, avec $p=2$, on a

$$x_1=16,\quad x_2=-8,\quad x_3=-5,$$
$$X_1=5,\quad X_2=1,\quad X_3=2;$$

avec $p=4$, on trouve ces deux solutions :

$$x_1=104,\quad x_2=-72,\quad x_3=-21,$$
$$X_1=15,\quad X_2=7,\quad X_3=10;$$
$$x_1=-80,\quad x_2=-112,\quad x_3=-44,$$
$$X_1=8,\quad X_2=16,\quad X_3=10.$$

Pour le système I_3, les formules (5) et (6) donnent les solutions générales suivantes :

$$x_1=p_1[4(p_1^2+p_2^2+p_1p_2)+p_1],$$
$$x_2=p_2[4(p_1^2+p_2^2+p_1p_2)+p_2],$$
$$-x_3=2(p_1^2+p_2^2+p_1p_2)(2p_1+2p_2-1)+p_1^2+p_2^2,$$
$$X_1=2(p_1^2+p_2^2+p_1p_2)+p_1,$$
$$X_2=2(p_1^2+p_2^2+p_1p_2)+p_2,$$
$$X_3=2(p_1^2+p_2^2+p_1p_2)-p_1-p_2$$

et

$$x_1=-p_1[4(p_1^2+p_2^2+p_1p_2)-5p_1-4p_2+2],$$
$$x_2=-p_2[4(p_1^2+p_2^2+p_1p_2)-4p_1-5p_2+2],$$
$$x_3=[2(p_1^2+p_2^2+p_1p_2)-2p_1-2p_2+1]$$
$$\times(2p_1+2p_2-1)-p_1^2-p_2^2,$$
$$X_1=2(p_1^2+p_2^2+p_1p_2)-3p_1-2p_2+1,$$
$$X_2=2(p_1^2+p_2^2+p_1p_2)-2p_1-3p_2+1,$$
$$X_3=2(p_1^2+p_2^2+p_1p_2)-p_1-p_2.$$

Pour $p_1=1$, $p_2=2$, ces deux formules donnent

$$x_1=29,\quad x_2=60,\quad x_3=-75,$$
$$X_1=15,\quad X_2=16,\quad X_3=11;$$
$$x_1=-17,\quad x_2=-32,\quad x_3=40,$$
$$X_1=8,\quad X_2=7,\quad X_3=11.$$

De (7) on déduit aussi cette solution générale, où l'on

a posé $p_1 = - p_2 = p$,

$$x_1 = - p(4p^2 - p + 2), \qquad X_1 = 2p^2 - p + 1,$$
$$x_2 = \quad p(4p^2 + p + 2), \qquad X_2 = 2p^2 + p + 1,$$
$$x_3 = -(4p^2 + 1), \qquad X_3 = 2p^2.$$

Par exemple, $p = 3$ donne

$$x_1 = -105, \qquad x_2 = 123, \qquad x_3 = -37,$$
$$X_1 = \quad 16, \qquad X_2 = \quad 22, \qquad X_3 = \quad 18.$$

On peut toujours déduire de (9) de nombreuses formules générales, si l'on prend pour p_1 et p_2 des fonctions d'un paramètre h telles que le nombre N correspondant soit toujours un produit de deux facteurs. Ainsi pour $p_1 = 1$, $p_2 = 3h - 1$, on trouve

$$N = 72h^2 - 36h + 9,$$

d'où l'on tire d'abord

$$a = 24h^2 - 12h + 3, \qquad b = 3.$$

On a alors les formules

$$x_1 = 3(4h^2 + 1), \qquad X_1 = 2(3h^2 + 1),$$
$$x_2 = 36h^3 - 3h^2 - 1, \qquad X_2 = 3h(2h + 1),$$
$$x_3 = -(36h^3 + 3h^2 + 1), \qquad X_3 = 3h(2h - 1)$$

et

$$x_1 = -12h^3 + 12h - 3, \qquad X_1 = 6h^2 - 6h + 1,$$
$$x_2 = -36h^3 + 57h^2 - 30h + 5, \qquad X_2 = 6h^2 - 9h + 3,$$
$$x_3 = \quad 36h^3 - 51h^2 + 24h - 4, \qquad X_3 = 3h(2h - 1).$$

Si l'on prend ensuite

$$a = 8h^2 - 4h + 1, \qquad b = 9,$$

on trouve ces solutions générales :

$$x_1 = 4h^2 + 4h + 5, \qquad X_1 = 2h^2 + 2h + 3,$$
$$x_2 = (3h - 1)(4h^2 + 7h + 3), \qquad X_2 = 2h^2 + 5h + 1,$$
$$x_3 = -h(12h^2 + 19h + 4), \qquad X_3 = 2h^2 - \quad h - 2$$

et

$$x_1 = -(4h^2 - 8h + 5), \qquad X_1 = 2h^2 - 4h + 2,$$
$$x_2 = -(3h - 1)(4h^2 - 11h + 7), \qquad X_2 = 2h^2 - 7h + 4,$$
$$x_3 = 12h^3 - 35h^2 + 28h - 5, \qquad X_3 = 2h^2 - h - 2.$$

Étude du système II_n.

5. Si l'on pose encore

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_{n-1} + x_n = t,$$

et si l'on ajoute les équations membres à membres, on voit que, pour résoudre le système II_n, il suffit de résoudre l'équation

$$(10) \qquad nt^2 - (n-1)t = X_1^2 + X_2^2 + \ldots + X_{n-1}^2 + X_n^2.$$

Les inconnues $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ont alors pour expressions

$$x_1 = X_1^2 - t^2 + t, \quad x_2 = X_2^2 - t^2 + t, \quad \ldots, \quad x_n = X_n^2 - t^2 + t.$$

Posons

$$(11) \quad X_1 = t + p_1, \quad X_2 = t + p_2, \quad \ldots, \quad X_{n-1} = t + p_{n-1};$$

suivant que t sera positif ou négatif, les inconnues x_1, $x_2, \ldots, x_{n-1}$ auront donc les signes de $p_1, p_2, \ldots, p_{n-1}$ ou ceux de $-(p_1+1), -(p_2+1), \ldots, -(p_{n-1}+1)$. Désignons encore par Σp et Σp^2 la somme des $n-1$ nombres p et celle de leurs carrés; si l'on porte dans l'équation (10) les valeurs (11), on trouve

$$t^2 - (2\Sigma p + n - 1)t - \Sigma p^2 - X_n^2 = 0.$$

Considérons d'abord le cas où n est *impair*, et soit $n = 2k+1$. On a alors

$$t = \Sigma p + k \pm \sqrt{(\Sigma p + k)^2 + \Sigma p^2 + X_n^2}.$$

Pour que le nombre

$$N = (\Sigma p + k)^2 + \Sigma p^2$$

soit une différence de deux carrés, il faut qu'il soit impair, ou multiple de 4.

Si k est impair, c'est-à-dire si n est de la forme $4m - 1$, le nombre N est toujours impair, puisque Σp et Σp^2 sont de même parité.

Supposons ensuite que k soit pair. Si Σp est pair, $(\Sigma p + k)^2$ est multiple de 4, et il faut, par suite, que Σp^2 soit aussi multiple de 4 ; il faut donc que le nombre de nombres p impairs soit nul ou multiple de 4. Si, au contraire, Σp est impair, $(\Sigma p + k)^2$ est de la forme $4m + 1$, et il faut que Σp^2 soit de la forme $4m - 1$. Par suite, le nombre des nombres p impairs doit être de la forme $4q - 1$.

En résumé, pour que N soit différence de deux carrés, les nombres p peuvent être quelconques, excepté que, si n est de la forme $4m + 1$, le nombre des nombres p impairs doit être de l'une des formes $4q$, $4q - 1$. Si l'on décompose le nombre N en deux facteurs de même parité a et b, on a

$$X_n = \frac{1}{2}(a - b), \qquad t = \Sigma p + k \pm \frac{1}{2}(a + b),$$

et, suivant qu'on adopte dans l'expression de t le signe + ou le signe —, t sera positif ou négatif.

En réunissant les considérations qui précèdent, on obtient le résultat suivant :

Si n est impair, on choisit $n - 1$ nombres p_1, $p_2, \ldots, p_{n-1}$ et l'on décompose le nombre

$$N = (\Sigma p + k)^2 + \Sigma p^2$$

en un produit de deux facteurs a et b de même

parité; on a alors des solutions du système II_n *en prenant*

$$(12)\quad \begin{cases} x_1 = \left[\Sigma p + k \pm \frac{1}{2}(a+b)\right](2p_1+1) + p_1^2, \\ x_2 = \left[\Sigma p + k \pm \frac{1}{2}(a+b)\right](2p_2+1) + p_2^2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ x_{n-1} = \left[\Sigma p + k \pm \frac{1}{2}(a+b)\right](2p_{n-1}+1) + p_{n-1}^2, \\ -x_n = \left[\Sigma p + k \pm \frac{1}{2}(a+b)\right](2\Sigma p + n - 2) + \Sigma p^2; \\ X_1 = p_1 \quad + \Sigma p + k \pm \frac{1}{2}(a+b), \\ X_2 = p_2 \quad + \Sigma p + k \pm \frac{1}{2}(a+b), \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ X_{n-1} = p_{n-1} + \Sigma p + k \pm \frac{1}{2}(a+b), \\ X_n = \frac{1}{2}(a-b). \end{cases}$$

Les nombres p sont quelconques; toutefois dans le cas où n est de la forme $4m+1$, *il faut que le nombre de nombres p impairs soit de l'une des formes* $4q$, $4q-1$. *Suivant qu'on prend dans les formules qui précèdent les signes supérieurs ou inférieurs là où figurent les doubles signes, les inconnues* $x_1, x_2, \dots, x_{n-1}$ *auront les signes de* $p_1, p_2, \dots, p_{n-1}$ *ou ceux de* $-(p_1+1)$, $-(p_2+1)$, $\dots$, $-(p_{n-1}+1)$.

Supposons maintenant que n soit *pair;* on a alors

$$t = \frac{1}{2}\left[2\Sigma p + n - 1 \pm \sqrt{(2\Sigma p + n - 1)^2 + 4\Sigma p^2 + 4X_n^2}\right].$$

Le nombre

$$N = (2\Sigma p + n - 1)^2 + 4\Sigma p^2$$

est alors toujours de la forme $4m+1$ et est, par suite, au moins d'une façon, la différence de deux carrés dont le plus petit est pair. Si $N = a.b$, on aura

$$X_n = \frac{1}{4}(a-b), \qquad t = \Sigma p \pm \frac{1}{4}(a+b \pm 2n \mp 2),$$

et l'on obtient, par conséquent, ce résultat :

Si n est pair, on choisit $n-1$ *nombres quelconques* $p_1, p_2, \ldots, p_{n-1}$ *et l'on décompose le nombre*

$$N = (2\Sigma p + n - 1)^2 + 4\Sigma p^2$$

en un produit de deux facteurs a, b; *les formules suivantes donnent alors des solutions du système* Π_n :

$$(13)\quad \left\{\begin{aligned}
x_1 &= \left[\Sigma p \pm \frac{1}{4}(a+b \pm 2n \mp 2)\right](2p_1+1) + p_1^2,\\
x_2 &= \left[\Sigma p \pm \frac{1}{4}(a+b \pm 2n \mp 2)\right](2p_2+1) + p_2^2,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
x_{n-1} &= \left[\Sigma p \pm \frac{1}{4}(a+b \pm 2n \mp 2)\right](2p_{n-1}+1) + p_{n-1}^2,\\
-x_n &= \left[\Sigma p \pm \frac{1}{4}(a+b \pm 2n \mp 2)\right](2\Sigma p + n - 2) + \Sigma p^2;\\
X_1 &= p_1 + \Sigma p \pm \frac{1}{4}(a+b \pm 2n \mp 2),\\
X_2 &= p_2 + \Sigma p \pm \frac{1}{4}(a+b \pm 2n \mp 2),\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
X_{n-1} &= p_{n-1} + \Sigma p \pm \frac{1}{4}(a+b \mp 2n \mp 2),\\
X_n &= \frac{1}{4}(a-b).
\end{aligned}\right.$$

Les inconnues $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ *auront les signes de* $p_1, p_2, \ldots, p_{n-1}$ *ou ceux de* $-(p_1+1), -(p_2+1), \ldots,$

— $(p_{n-1}+1)$ *suivant qu'on prend dans ces formules les signes supérieurs ou inférieurs là où figurent des doubles signes.*

6. *Formules à $n-1$ paramètres.* — Comme nous l'avons fait pour le système I_n, nous pouvons déduire de ce qui précède des formules générales à $n-1$ paramètres $p_1, p_2, \ldots, p_{n-1}$; nous considérons encore trois cas :

α. *n de la forme $4m-1$*; on a vu qu'alors N est toujours impair. Prenons donc $a = \mathrm{N}$, $b = 1$; on obtient ainsi ces formules

$$(14)\quad \left\{\begin{aligned}
x_1 &= \left[(1\pm k)\Sigma p \pm \frac{1}{2}(\Sigma p)^2 \pm \frac{1}{2}\Sigma p^2 \pm \frac{1}{2}(k\pm 1)^2\right](2p_1+1)+p_1^2,\\
x_2 &= \left[(1\pm k)\Sigma p \pm \frac{1}{2}(\Sigma p)^2 \pm \frac{1}{2}\Sigma p^2 \pm \frac{1}{2}(k\pm 1)^2\right](2p_2+1)+p_2^2,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
x_{n-1} &= \left[(1\pm k)\Sigma p \pm \frac{1}{2}(\Sigma p)^2 \pm \frac{1}{2}\Sigma p^2 \pm \frac{1}{2}(k\pm 1)^2\right](2p_{n-1}+1)+p_{n-1}^2,\\
-x_n &= \left[(1\pm k)\Sigma p \pm \frac{1}{2}(\Sigma p)^2 \pm \frac{1}{2}\Sigma p^2 \pm \frac{1}{2}(k\pm 1)^2\right](2\Sigma p+n-2)+\Sigma p^2;\\
\mathrm{X}_1 &= p_1+(1\pm k)\Sigma p \pm \frac{1}{2}(\Sigma p)^2 \pm \frac{1}{2}\Sigma p^2 \pm \frac{1}{2}(k\pm 1)^2,\\
\mathrm{X}_2 &= p_2+(1\pm k)\Sigma p \pm \frac{1}{2}(\Sigma p)^2 \pm \frac{1}{2}\Sigma p^2 \pm \frac{1}{2}(k\pm 1)^2,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
\mathrm{X}_{n-1} &= p_{n-1}+(1\pm k)\Sigma p \pm \frac{1}{2}(\Sigma p)^2 \pm \frac{1}{2}\Sigma p^2 \pm \frac{1}{2}(k\pm 1)^2,\\
\mathrm{X}_n &= k\Sigma p + \frac{1}{2}(\Sigma p)^2 + \frac{1}{2}\Sigma p^2 + \frac{1}{2}(k^2-1).
\end{aligned}\right.$$

β. *n de la forme $4m+1$*; dans ce cas le nombre de nombres p impairs doit être de l'une des formes $4q$, $4q-1$ et N est toujours multiple de 4. Posons donc

$a=\frac{1}{2}N$, $b=2$; on a alors

$$(15)\quad \begin{cases} x_1=\left[\left(1\pm\frac{1}{2}k\right)\Sigma p\pm\frac{1}{4}(\Sigma p)^2\pm\frac{1}{4}\Sigma p^2\pm\left(\frac{1}{2}k\pm1\right)^2\right](2p_1+1)+p_1^2,\\ x_2=\left[\left(1\pm\frac{1}{2}k\right)\Sigma p\pm\frac{1}{4}(\Sigma p)^2\pm\frac{1}{4}\Sigma p^2\pm\left(\frac{1}{2}k\pm1\right)^2\right](2p_2+1)+p_2^2,\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\ x_{n-1}=\left[\left(1\pm\frac{1}{2}k\right)\Sigma p\pm\frac{1}{4}(\Sigma p)^2\pm\frac{1}{4}\Sigma p^2\pm\left(\frac{1}{2}k\pm1\right)^2\right](2p_{n-1}+1)+p_{n-1}^2,\\ -x_n=\left[\left(1\pm\frac{1}{2}k\right)\Sigma p\pm\frac{1}{4}(\Sigma p)^2\pm\frac{1}{4}\Sigma p^2\pm\left(\frac{1}{2}k\pm1\right)^2\right](2\Sigma p+n-2)+\Sigma p^2;\\ X_1=p_1+\left(1\pm\frac{1}{2}k\right)\Sigma p\pm\frac{1}{4}(\Sigma p)^2\pm\frac{1}{4}\Sigma p^2\pm\left(\frac{1}{2}k\pm1\right)^2,\\ X_2=p_2+\left(1\pm\frac{1}{2}k\right)\Sigma p\pm\frac{1}{4}(\Sigma p)^2\pm\frac{1}{4}\Sigma p^2\pm\left(\frac{1}{2}k\pm1\right)^2,\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\ X_{n-1}=p_{n-1}+\left(1\pm\frac{1}{2}k\right)\Sigma p\pm\frac{1}{4}(\Sigma p)^2\pm\frac{1}{4}\Sigma p^2\pm\left(\frac{1}{2}k\pm1\right)^2,\\ X_n=\frac{1}{4}(\Sigma p)^2+\frac{1}{4}\Sigma p^2+\frac{1}{2}k\Sigma p+\frac{1}{4}k^2-1. \end{cases}$$

γ. *n pair*. En prenant $a=N$ et $b=1$ et en employant dans les formules (13) relatives à ce cas les signes supérieurs, on trouve les formules suivantes :

$$(16)\quad \begin{cases} x_1=\left[(\Sigma p)^2+\Sigma p^2+n\Sigma p+\frac{1}{4}n^2\right](2p_1+1)+p_1^2,\\ x_2=\left[(\Sigma p)^2+\Sigma p^2+n\Sigma p+\frac{1}{4}n^2\right](2p_2+1)+p_2^2,\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\ x_{n-1}=\left[(\Sigma p)^2+\Sigma p^2+n\Sigma p+\frac{1}{4}n^2\right](2p_{n-1}+1)+p_{n-1}^2,\\ -x_n=\left[(\Sigma p)^2+\Sigma p^2+n\Sigma p+\frac{1}{4}n^2\right](2\Sigma p+n-2)+\Sigma p^2;\\ X_1=p_1+(\Sigma p)^2+\Sigma p^2+n\Sigma p+\frac{1}{4}n^2,\\ X_2=p_2+(\Sigma p)^2+\Sigma p^2+n\Sigma p+\frac{1}{4}n^2,\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\ X_{n-1}=p_{n-1}+(\Sigma p)^2+\Sigma p^2+n\Sigma p+\frac{1}{4}n^2,\\ X_n=(\Sigma p)^2+\Sigma p^2+(n-1)\Sigma p+\frac{1}{4}n(n-2). \end{cases}$$

Avec les signes inférieurs on trouve de même

$$(17)\quad \begin{cases} x_1 = -\left[(\Sigma p)^2 + \Sigma p^2 + (n-2)\Sigma p + \left(\frac{1}{2}n - 1\right)^2\right](2p_1+1) + p_1^2, \\ x_2 = -\left[(\Sigma p)^2 + \Sigma p^2 + (n-2)\Sigma p + \left(\frac{1}{2}n - 1\right)^2\right](2p_2+1) + p_2^2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ x_{n-1} = -\left[(\Sigma p)^2 + \Sigma p^2 + (n-2)\Sigma p + \left(\frac{1}{2}n - 1\right)^2\right](2p_{n-1}+1) + p_{n-1}^2; \\ X_1 = (\Sigma p)^2 + \Sigma p^2 + (n-2)\Sigma p - p_1 + \left(\frac{1}{2}n - 1\right)^2, \\ X_2 = (\Sigma p)^2 + \Sigma p^2 + (n-2)\Sigma p - p_2 + \left(\frac{1}{2}n - 1\right)^2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ X_{n-1} = (\Sigma p)^2 + \Sigma p^2 + (n-2)\Sigma p - p_{n-1} + \left(\frac{1}{2}n - 1\right)^2, \\ X_n = (\Sigma p)^2 + \Sigma p^2 + (n-1)\Sigma p + \frac{1}{4}n(n-2). \end{cases}$$

Il y a lieu d'observer que les formules qui précèdent prennent une forme simple si l'on choisit des nombres $p_1, p_2, \ldots, p_{n-1}$ dont la somme est nulle.

Nous appliquerons ces considérations générales aux cas de $n = 3$, $n = 4$, $n = 5$, qui fournissent des exemples des trois cas que nous venons d'envisager.

7. *Système* II_3. — Pour $n = 3$, on a le système

$$\begin{aligned} (x_1 + x_2 + x_3)^2 - (x_2 + x_3) &= X_1^2, \\ (x_1 + x_2 + x_3)^2 - (x_1 + x_3) &= X_2^2, \\ (x_1 + x_2 + x_3)^2 - (x_1 + x_2) &= X_3^2. \end{aligned}$$

Le nombre N a alors pour expression

$$N = a.b = 2(p_1^2 + p_2^2 + p_1 p_2 + p_1 + p_2) + 1,$$

et l'on a, d'après (12),

$$(18)\quad\left\{\begin{aligned}
x_1 &= \left[p_1+p_2\pm\frac{1}{2}(a+b)+1\right](2p_1+1)+p_1^2,\\
x_2 &= \left[p_1+p_2\pm\frac{1}{2}(a+b)+1\right](2p_2+1)+p_2^2,\\
-x_3 &= \left[p_1+p_2\pm\frac{1}{2}(a+b)+1\right](2p_1+2p_2+1)+p_1^2+p_2^2;\\
X_1 &= 2p_1+p_2\pm\frac{1}{2}(a+b)+1,\\
X_2 &= p_1+2p_2\pm\frac{1}{2}(a+b)+1,\\
X_3 &= \frac{1}{2}(a-b).
\end{aligned}\right.$$

Si $p_1=1$, $p_2=2$, on trouve $N=21$, d'où $a=7$, $b=3$ et

$$x_1=28,\qquad x_2=49,\qquad x_3=-68;$$
$$X_1=10,\qquad X_2=11,\qquad X_3=2.$$

Des formules (14) on déduit ensuite, en prenant les signes supérieurs :

$$\begin{aligned}
x_1 &= (p_1^2+p_2^2+p_1p_2+2p_1+2p_2+2)(2p_1+1)+p_1^2,\\
x_2 &= (p_1^2+p_2^2+p_1p_2+2p_1+2p_2+2)(2p_2+1)+p_2^2,\\
x_3 &= -(p_1^2+p_2^2+p_1p_2+2p_1+2p_2+2)(2p_1+2p_2+1)-p_1^2-p_2^2;\\
X_1 &= p_1^2+p_2^2+p_1p_2+3p_1+2p_2+2,\\
X_2 &= p_1^2+p_2^2+p_1p_2+2p_1+3p_2+2,\\
X_3 &= p_1^2+p_2^2+p_1p_2+p_1+p_2.
\end{aligned}$$

Ainsi, pour $p_1=2$, $p_2=-1$, on a

$$x_1=39,\qquad x_2=-6,\qquad x_3=-26;$$
$$X_1=9,\qquad X_2=6,\qquad X_3=4.$$

Si l'on pose dans ces formules $p_1=-p_2=p$, on trouve ces solutions générales :

$$\begin{aligned}
x_1 &= 2(p^3+p^2+2p+1), &\qquad X_1 &= p^2+p+2,\\
x_2 &= -2(p^3-p^2+2p-1), &\qquad X_2 &= p^2-p+2,\\
x_3 &= -(3p^2+2); &\qquad X_3 &= p^2.
\end{aligned}$$

Pour $p = 1$, on obtient la solution

$$x_1 = 10, \quad x_2 = -2, \quad x_3 = -5;$$
$$X_1 = 4, \quad X_2 = 2, \quad X_3 = 1;$$

pour $p = 3$, on a

$$x_1 = 86, \quad x_2 = -46, \quad x_3 = -29;$$
$$X_1 = 14, \quad X_2 = 8, \quad X_3 = 9.$$

En adoptant dans (14) les signes inférieurs on obtient encore ces solutions du système II_3 :

$$\begin{aligned}
x_1 &= -(p_1^2 + p_2^2 + p_1 p_2)(2p_1 + 1) + p_1^2,\\
x_2 &= -(p_1^2 + p_2^2 + p_1 p_2)(2p_2 + 1) + p_2^2,\\
x_3 &= (p_1^2 + p_2^2 + p_1 p_2)(2p_1 + 2p_2 + 1) - p_1^2 - p_2^2;\\
X_1 &= p_1^2 + p_2^2 + p_1 p_2 - p_1,\\
X_2 &= p_1^2 + p_2^2 + p_1 p_2 - p_2,\\
X_3 &= p_1^2 + p_2^2 + p_1 p_2 + p_1 + p_2.
\end{aligned}$$

Par exemple, avec $p_1 = 3$, $p_2 = -2$, on a

$$x_1 = -40, \quad x_2 = 25, \quad x_3 = 8;$$
$$X_1 = 4, \quad X_2 = 9, \quad X_3 = 8.$$

En faisant dans les dernières formules $p_1 = -p_2 = p$, on trouve ces solutions générales simples :

$$x_1 = -2p^3, \quad x_2 = 2p^3, \quad x_3 = -p^2;$$
$$X_1 = p(p-1), \quad X_2 = p(p+1), \quad X_3 = p^2.$$

Ainsi, pour $p = 2$, on obtient

$$x_1 = -16, \quad x_2 = 16, \quad x_3 = -4;$$
$$X_1 = 2, \quad X_2 = 6, \quad X_3 = 4;$$

pour $p = 3$,

$$x_1 = -54, \quad x_2 = 54, \quad x_3 = -9;$$
$$X_1 = 6, \quad X_2 = 12, \quad X_3 = 9.$$

On peut aussi déduire de (18) de nombreuses solutions générales en choisissant pour p_1 et p_2 des fonc-

d'un paramètre h telles que le nombre N correspondant soit toujours un produit de deux facteurs. Posons, par exemple, $p_1 = 3h - 1$, $p_2 = -3h - 1$; on a

$$N = 18h^2 + 3, \qquad a = 6h^2 + 1, \qquad b = 3,$$

d'où la solution générale

$$\begin{aligned} x_1 &= 6h^2(3h+1), & X_1 &= 3h(h+1), \\ x_2 &= -6h^2(3h-1), & X_2 &= 3h(h-1), \\ x_3 &= 1 - 9h^2; & X_3 &= 3h^2 - 1. \end{aligned}$$

8. *Système* II_4. — On considère donc le système

$$\begin{aligned} (x_1 + x_2 + x_3 + x_4)^2 - (x_2 + x_3 + x_4) &= X_1^2, \\ (x_1 + x_2 + x_3 + x_4)^2 - (x_1 + x_3 + x_4) &= X_2^2, \\ (x_1 + x_2 + x_3 + x_4)^2 - (x_1 + x_2 + x_4) &= X_3^2, \\ (x_1 + x_2 + x_3 + x_4)^2 - (x_1 + x_2 + x_3) &= X_4^2. \end{aligned}$$

On a dans ce cas

$$N = a.b = (2p_1 + 2p_2 + 2p_3 + 3)^2 + 4(p_1^2 + p_2^2 + p_3^2),$$

et les formules (13) s'écrivent

$$\begin{aligned} x_1 &= \left[p_1 + p_2 + p_3 \pm \frac{1}{4}(a + b \pm 6)\right](2p_1 + 1) + p_1^2, \\ x_2 &= \left[p_1 + p_2 + p_3 \pm \frac{1}{4}(a + b \pm 6)\right](2p_2 + 1) + p_2^2, \\ x_3 &= \left[p_1 + p_2 + p_3 \pm \frac{1}{4}(a + b \pm 6)\right](2p_3 + 1) + p_3^2, \\ -x_4 &= 2\left[p_1 + p_2 + p_3 \pm \frac{1}{4}(a + b \pm 6)\right](p_1 + p_2 + p_3 + 1) + p_1^2 + p_2^2 + p_3^2; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} X_1 &= 2p_1 + p_2 + p_3 \pm \frac{1}{4}(a + b \pm 6), \\ X_2 &= p_1 + 2p_2 + p_3 \pm \frac{1}{4}(a + b \pm 6), \\ X_3 &= p_1 + p_2 + 2p_3 \pm \frac{1}{4}(a + b \pm 6), \\ X_4 &= \frac{1}{4}(a - b). \end{aligned}$$

Par exemple, avec $p_1 = 3$, $p_2 = 1$, $p_3 = 0$, on a

$$N = 161, \qquad a = 23, \qquad b = 7$$

et

$$\begin{array}{llll} x_1 = 100, & x_2 = 40, & x_3 = 13, & x_4 = -140; \\ X_1 = 16, & X_2 = 14, & X_3 = 13, & X_4 = 4; \end{array}$$

avec $p_1 = 2$, $p_2 = 1$, $p_3 = -3$, on trouve

$$N = 65, \qquad a = 13, \qquad b = 5$$

et

$$\begin{array}{llll} x_1 = 34, & x_2 = 19, & x_3 = -21, & x_4 = -26; \\ X_1 = 8, & X_2 = 7, & X_3 = 3, & X_4 = 2. \end{array}$$

D'après les formules (16), on a ensuite ces solutions générales à trois paramètres :

$$\begin{aligned} x_1 &= 2[p_1^2+p_2^2+p_3^2+p_1p_2+p_2p_3+p_3p_1+2(p_1+p_2+p_3)+2](2p_1+1)+p_1^2, \\ x_2 &= 2[p_1^2+p_2^2+p_3^2+p_1p_2+p_2p_3+p_3p_1+2(p_1+p_2+p_3)+2](2p_2+1)+p_2^2, \\ x_3 &= 2[p_1^2+p_2^2+p_3^2+p_1p_2+p_2p_3+p_3p_1+2(p_1+p_2+p_3)+2](2p_3+1)+p_3^2, \\ -x_4 &= 4[p_1^2+p_2^2+p_3^2+p_1p_2+p_2p_3+p_3p_1+2(p_1+p_2+p_3)+2] \\ &\qquad \times (p_1+p_2+p_3+1)+p_1^2+p_2^2+p_3^2; \\ X_1 &= 2(p_1^2+p_2^2+p_3^2+p_1p_2+p_2p_3+p_3p_1)+5p_1+4p_2+4p_3+4, \\ X_2 &= 2(p_1^2+p_2^2+p_3^2+p_1p_2+p_2p_3+p_3p_1)+4p_1+5p_2+4p_3+4, \\ X_3 &= 2(p_1^2+p_2^2+p_3^2+p_1p_2+p_2p_3+p_3p_1)+4p_1+4p_2+5p_3+4, \\ X_4 &= 2(p_1^2+p_2^2+p_3^2+p_1p_2+p_2p_3+p_3p_1)+3(p_1+p_2+p_3)+2. \end{aligned}$$

Ainsi, avec $p_1 = 1$, $p_2 = 0$, $p_3 = -2$, on trouve

$$(19) \quad \left\{ \begin{array}{llll} x_1 = 19, & x_2 = 6, & x_3 = -14, & x_4 = -5; \\ X_1 = 7, & X_2 = 6, & X_9 = 4, & X_4 = 5. \end{array} \right.$$

On déduit de même de (17) ces solutions :

$$\begin{aligned} x_1 &= -[2(p_1^2+p_2^2+p_3^2+p_1p_2+p_2p_3+p_3p_1+p_1+p_2+p_3)+1](2p_1+1)+p_1^2, \\ x_2 &= -[2(p_1^2+p_2^2+p_3^2+p_1p_2+p_2p_3+p_3p_1+p_1+p_2+p_3)+1](2p_2+1)+p_2^2, \\ x_3 &= -[2(p_1^2+p_2^2+p_3^2+p_1p_2+p_2p_3+p_3p_1+p_1+p_2+p_3)+1](2p_3+1)+p_3^2, \\ x_4 &= 2[2(p_1^2+p_2^2+p_3^2+p_1p_2+p_2p_3+p_3p_1+p_1+p_1+p_3)+1] \\ &\qquad \times (p_1+p_2+p_3+1)-p_1^2-p_2^2-p_3^2; \\ X_1 &= 2(p_1^2+p_2^2+p_3^2+p_1p_2+p_2p_3+p_3p_1)+p_1+2p_2+2p_3+1, \\ X_2 &= 2(p_1^2+p_2^2+p_3^2+p_1p_2+p_2p_3+p_3p_1)+2p_1+p_2+2p_3+1, \\ X_3 &= 2(p_1^2+p_2^2+p_3^2+p_1p_2+p_2p_3+p_3p_1)+2p_1+2p_2+p_3+1, \\ X_4 &= 2(p_1^2+p_2^2+p_3^2+p_1p_2+p_2p_3+p_3p_1)+3(p_1+p_2+p_3)+2. \end{aligned}$$

Pour $p_1 = 2$, $p_2 = 1$, $p_3 = -1$, on a

$$x_1 = -71, \quad x_2 = -44, \quad x_3 = 16, \quad x_4 = 84;$$
$$X_1 = 13, \quad X_2 = 14, \quad X_3 = 16, \quad X_4 = 18.$$

Si $p_1 + p_2 + p_3 = 0$, et si l'on désigne $\frac{1}{2}(p_1^2 + p_2^2 + p_3^2)$ par π, on trouve, comme cas particuliers des formules que nous venons d'obtenir, ces solutions :

$$\begin{aligned}
x_1 &= 2(\pi + 2)(2p_1 + 1) + p_1^2, & X_1 &= 2(\pi + 2) + p_1,\\
x_2 &= 2(\pi + 2)(2p_2 + 1) + p_2^2, & X_2 &= 2(\pi + 2) + p_2,\\
x_3 &= 2(\pi + 2)(2p_3 + 1) + p_3^2, & X_3 &= 2(\pi + 2) + p_3,\\
x_4 &= -2(3\pi + 4); & X_4 &= 2(\pi + 1)
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
x_1 &= -(2\pi + 1)(2p_1 + 1) + p_1^2, & X_1 &= 2\pi + p_1 + 1,\\
x_2 &= -(2\pi + 1)(2p_2 + 1) + p_2^2, & X_2 &= 2\pi + p_2 + 1,\\
x_3 &= -(2\pi + 1)(2p_3 + 1) + p_3^2, & X_3 &= 2\pi + p_3 + 1,\\
x_4 &= 2(\pi + 1); & X_4 &= 2(\pi + 1).
\end{aligned}$$

Signalons encore les formules suivantes, qu'on déduit aisément des premières formules générales à trois paramètres qui précèdent et qui donnent des *solutions du système* II_4 *pour lesquelles les inconnues* X_1, X_2, X_3, X_4 *sont en progression arithmétique :*

$$\begin{aligned}
x_1 &= 6(10h^2 + 10h + 3)(2h + 1) + (3h + 1)^2,\\
x_2 &= 2(10h^2 + 10h + 3)(2h + 1) + h^2,\\
x_3 &= -2(10h^2 + 10h + 3)(2h + 1) + (h + 1)^2,\\
x_4 &= -4(10h^2 + 10h + 3)(3h + 1) - 11h^2 - 8h - 2;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
X_1 &= 20h^2 + 23h + 7,\\
X_2 &= 20h^2 + 21h + 6,\\
X_3 &= 20h^2 + 19h + 5,\\
X_4 &= 20h^2 + 17h + 4.
\end{aligned}$$

Pour $h = 0$, on a

$$x_1 = 19, \quad x_2 = 6, \quad x_3 = -5, \quad x_4 = -14;$$
$$X_1 = 7, \quad X_2 = 6, \quad X_3 = 5, \quad X_4 = 4;$$

c'est la solution (19). Pour $h = 1$, on obtient

$$x_1 = 430,\quad x_2 = 139,\quad x_3 = -134,\quad x_4 = -389;$$
$$X_1 = 50,\quad X_2 = 47,\quad X_3 = 44,\quad X_4 = 41.$$

9. *Système* II$_5$. — Pour le cas de cinq équations, ce sont surtout les formules (15) prises avec les signes inférieurs qui donnent lieu à des solutions générales d'une forme assez simple. Ainsi, on a

$$x_1 = -\frac{1}{4}[(\Sigma p)^2 + \Sigma p^2](2p_1 + 1) + p_1^2,$$
$$x_2 = -\frac{1}{4}[(\Sigma p)^2 + \Sigma p^2](2p_2 + 1) + p_2^2,$$
$$x_3 = -\frac{1}{4}[(\Sigma p)^2 + \Sigma p^2](2p_3 + 1) + p_3^2,$$
$$x_4 = -\frac{1}{4}[(\Sigma p)^2 + \Sigma p^2](2p_4 + 1) + p_4^2,$$
$$x_5 = \frac{1}{4}[(\Sigma p)^2 + \Sigma p^2](2\Sigma p + 3) - \Sigma p^2;$$
$$X_1 = \frac{1}{4}(\Sigma p)^2 + \frac{1}{4}\Sigma p^2 - p_1,$$
$$X_2 = \frac{1}{4}(\Sigma p)^2 + \frac{1}{4}\Sigma p^2 - p_2,$$
$$X_3 = \frac{1}{4}(\Sigma p)^2 + \frac{1}{4}\Sigma p^2 - p_3,$$
$$X_4 = \frac{1}{4}(\Sigma p)^2 + \frac{1}{4}\Sigma p^2 - p_4,$$
$$X_5 = \frac{1}{4}(\Sigma p)^2 + \frac{1}{4}\Sigma p^2 - \Sigma p.$$

Rappelons que, pour ce cas, le nombre de nombres p impairs doit être 0, 3 ou 4. Ainsi, avec $p_1 = 3$, $p_2 = 1$, $p_3 = 0$, $p_4 = -1$, on a

$$x_1 = -26,\quad x_2 = -14,\quad x_3 = -5,\quad x_4 = 6,\quad x_5 = 34;$$
$$X_1 = 2,\quad X_2 = 4,\quad X_3 = 5,\quad X_4 = 6,\quad X_5 = 8.$$

Si l'on suppose encore $\Sigma p = 0$, on trouve ces solu-

tions simples :

$$x_1 = -\frac{1}{4}\Sigma p^2(2p_1+1)+p_1^2, \qquad X_1 = \frac{1}{4}\Sigma p^2 - p_1,$$

$$x_2 = -\frac{1}{4}\Sigma p^2(2p_2+1)+p_2^2, \qquad X_2 = \frac{1}{4}\Sigma p^2 - p_2,$$

$$x_3 = -\frac{1}{4}\Sigma p^2(2p_3+1)+p_3^2, \qquad X_3 = \frac{1}{4}\Sigma p^2 - p_3,$$

$$x_4 = -\frac{1}{4}\Sigma p^2(2p_4+1)+p_4^2, \qquad X_4 = \frac{1}{4}\Sigma p^2 - p_4,$$

$$x_5 = -\frac{1}{4}\Sigma p^2; \qquad X_5 = \frac{1}{4}\Sigma p^2.$$

Si $p_1 = 2$, $p_2 = -2$, $p_3 = 4$, $p_4 = -4$, on a, d'après ces formules :

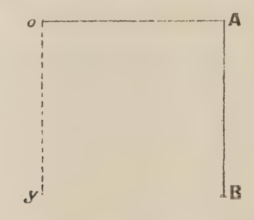
$$x_1 = -46, \quad x_2 = 34, \quad x_3 = -74, \quad x_4 = 86, \quad x_5 = -10,$$
$$X_1 = 8, \quad X_2 = 12, \quad X_3 = 6, \quad X_4 = 14, \quad X_5 = 10.$$

CERTIFICATS DE MÉCANIQUE RATIONNELLE.

Marseille.

Épreuve écrite. — *Deux barres* OA *et* AB *pesantes, homogènes et identiques, sont clouées l'une sur l'autre à leur extrémité commune* A.

L'extrémité O *de* OA *est fixe et en outre la barre* OA



est assujettie à rester horizontale. Il n'y a pas de frottement.

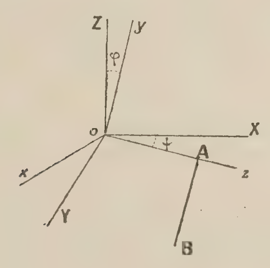
Le système étant en équilibre, on écarte très peu la barre AB *de la verticale et l'on abandonne le système à lui-même sans vitesse initiale.*

Étudier les petites oscillations.

N. B. — *On remarquera que, si l'on prend pour axes invariablement liés au système, la droite* OA *pour axe des z, la parallèle à* AB *pour axe des y, la quantité* Σmyz *n'est pas nulle.*

Solution.

Rapportons le solide à trois axes liés à lui, Oz dirigé sui-



vant OA, Oy parallèle à AB et Ox perpendiculaire sur yOz, et prenons trois axes fixes dont OZ vertical dirigé vers le haut comme Oy.

Soit φ l'angle de Oy et de OZ.

Soit ψ l'angle de Oz avec OX.

Les rotations autour de Ox, Oy, Oz sont

$$p = \sin\varphi\psi', \qquad q = \cos\varphi\psi', \qquad r = \varphi'.$$

L'ellipsoïde d'inertie du corps par rapport à $Oxyz$ est, en désignant par M la masse de l'une des barres et par a sa longueur,

$$Ma^2\left[\frac{5}{3}x^2 + \frac{4}{3}y^2 + \frac{1}{3}z^2 + 2\,\frac{1}{2}yz\right].$$

La force vive est donc

$$2T = Ma^2\left[\frac{5}{3}p^2 + \frac{4}{3}q^2 + \frac{1}{3}r^2 + 2\cdot\frac{1}{2}qr\right].$$

La somme des moments des forces par rapport à OZ étant

nulle, la somme des moments des quantités de mouvement par rapport à cet axe est constante, et par suite nulle et l'on a

$$\frac{\partial T}{\partial p}\sin\varphi + \frac{\partial T}{\partial q}\cos\varphi = 0,$$

ou

$$\frac{5}{3}p\sin^2\varphi + \left(\frac{4}{3}q + \frac{1}{2}r\right)\cos\varphi = 0.$$

Or, φ, p, q, r étant petits, admettons qu'on puisse négliger le second ordre, il viendra

$$(1) \qquad 8\psi' + 3\varphi' = 0.$$

Le théorème des moments par rapport à Oz donne, d'après Euler,

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial r}\right) + p\,\frac{\partial T}{\partial q} - q\,\frac{\partial T}{\partial p} = -\frac{1}{2}\,\mathrm{M}ga\sin\varphi$$

ou

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{1}{3}r + \frac{1}{2}q\right] + p\left[\frac{4}{3}q + \frac{1}{2}r\right] - q\times\frac{5}{3}p = -\frac{1}{2}\,\frac{g}{a}\sin\varphi,$$

ou approximativement

$$(2) \qquad 2\varphi'' + 3\psi'' + 3\,\frac{g}{a}\,\varphi = 0.$$

En intégrant (1) et (2) et posant $\frac{24}{7}\,\frac{g}{a} = k^2$, et en supposant que primitivement φ soit égale à α et ψ à zéro, on aura

$$\varphi = \alpha\cos kt,$$

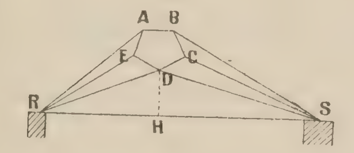
$$\mathrm{T} = \frac{3}{8}\,\alpha(1 - \cos kt).$$

Le mouvement est donc périodique. L'amplitude de l'oscillation de OA est α et celle (en ψ) de AB par rapport à la verticale $\frac{3}{4}\,\alpha$.

L'amplitude de l'oscillation de OA est donc les $\frac{4}{3}$ de celle de AB.

Épreuve pratique. — *Un système articulé est formé de*

onze tiges. Cinq des tiges forment un pentagone régulier ABCDE. *Aux sommets* B, C, D *sont articulées trois*



tiges BS, CS, DS *articulées toutes trois à leur extrémité* S. *Aux sommets* A, E, D *sont articulées trois tiges* AR, ER, DR *articulées toutes trois à leur extrémité* R.

Ce système est placé dans un plan vertical et il repose sans frottement par les sommets R *et* S *sur deux appuis situés dans un même plan horizontal.*

On applique aux cinq sommets du pentagone cinq poids égaux chacun à 200^{kg}. *Trouver les tensions des tiges. On négligera le poids des barres.*

Le côté du pentagone est égal à $0^{\text{m}},40$. *La ligne* RS *est parallèle à la barre* AB, *et elle est à une distance de* AB *égale à* $1^{\text{m}},20$. *Enfin, la perpendiculaire* DH *abaissée de* D *sur* RS *détermine les deux segments*

$$RH = 1^{\text{m}},90, \qquad SH = 2^{\text{m}},10.$$

(Novembre 1913.)

Épreuve écrite. — *Une plaque rectangulaire est mobile autour de son centre* O *qui est fixe. Trouver son mouvement.*

L'un des côtés de la plaque est double de l'autre, de sorte que l'ellipsoïde d'inertie relatif au point O *est, par un choix convenable d'unités,*

$$x^2 + 5y^2 + 4z^2 = 1,$$

en prenant pour axe des x *la parallèle au grand côté, pour axe des* y *la normale au plan de la plaque et pour axe des* z *la parallèle au petit côté de la plaque.*

La rotation initiale ω_0 *s'effectue autour d'un axe situé dans le plan des* xy *et elle fait avec l'axe des* x *un angle dont la tangente est* $\sqrt{\frac{3}{5}}$ *de sorte qu'on a pour les compo-*

santes de la rotation initiale

$$p_0 = \omega_0 \sqrt{\frac{5}{8}}, \qquad q_0 = \omega_0 \sqrt{\frac{3}{8}}, \qquad r_0 = 0.$$

On étudiera uniquement le mouvement de l'axe OZ.

ÉPREUVE PRATIQUE. — *On prend dans un plan horizontal quatre points fixes* A_1, A_2, A_3, A_4 *situés aux quatre sommets d'un carré de* 2^m *de côté.*

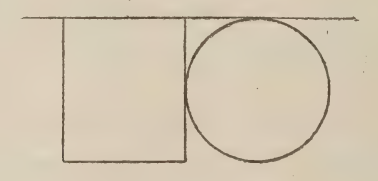
A ces quatre points on attache quatre fils élastiques de 4^m *de longueur chacun et l'on réunit leurs extrémités en un point* B *auquel on suspend un poids de* 100^{kg}.

Trouver approximativement la tension de chacun des fils et la position finale du point B *sachant que les fils s'allongent proportionnellement à leurs tensions et que sous l'action d'un poids de* 100^{kg} *le premier s'allonge de* 1 *pour* 100, *le deuxième de* 2 *pour* 100, *le troisième de* 3 *pour* 100 *et le quatrième de* 4 *pour* 100.

(Juin 1914.)

ÉPREUVE ÉCRITE. — *Dans un plan vertical, sur une droite dont la pente est* $\frac{3}{4}$, *on place une plaque carrée et un disque circulaire, la plaque étant poussée par le disque.*

Les deux corps ont le même poids et sont dépolis. Le coefficient de frottement de ces corps entre eux et avec la



droite est égal à $\frac{1}{2}$. *Primitivement le système est sans vitesse; trouver son mouvement.*

Quel devrait être le coefficient de frottement pour qu'il y ait équilibre?

SOLUTION.

Soient :

α l'inclinaison de la droite sur l'horizon ;
f le coefficient de frottement ;
M la masse du disque et celle de la plaque ;
X la composante normale de la pression d'un corps sur l'autre ;
Y la composante normale de la pression de la plaque sur la droite ;
Z la composante normale de la pression du disque sur la droite ;
T la composante tangentielle de cette pression ;
x l'abscisse du centre du disque dans la direction de la droite.

On a d'abord

$$Y = Mg\cos\alpha + Xf,$$
$$Z = Mg\cos\alpha - Xf.$$

On a ensuite, pour la translation de la plaque,

$$M\frac{d^2x}{dt^2} = Mg\sin\alpha + X - Yf;$$

pour la translation du disque,

$$M\frac{d^2x}{dt^2} = Mg\sin\alpha - X - T$$

et, pour la rotation du disque,

$$\frac{1}{2}M\frac{d^2x}{dt^2} = T - Xf.$$

En résolvant ce système d'équations, on trouve

$$\frac{d^2x}{dt^2} = 2g\frac{2\sin\alpha - f(\sin\alpha + \cos\alpha)}{5 - 3f},$$
$$X = Mg\frac{3f\cos\alpha - \sin\alpha}{(5 - 3f)(1 + f)},$$
$$T = Mg\frac{2\sin\alpha - f\cos\alpha - f^2(\sin\alpha - 2\cos\alpha)}{(5 - 3f)(1 + f)},$$
$$Z = Mg\frac{5\cos\alpha + f(\sin\alpha + 2\cos\alpha) - 6f^2\cos\alpha}{(5 - 3f)(1 + f)}.$$

Il y a roulement du disque si l'on a $T < Zf$, ce qui conduit à la condition $f > \frac{1}{3}\tan\alpha$, réalisée pour $f = \frac{1}{2}$.

Il y a donc roulement sans glissement et le mouvement des deux corps est uniformément accéléré, l'accélération étant égale à $\frac{2}{7}g$.

Si le frottement était tel qu'on eût $\frac{d^2x}{dt^2} = 0$, il y aurait équilibre. On aurait, dans ce cas,

$$f = \frac{2\sin\alpha}{\sin\alpha + \cos\alpha},$$

et, pour $\tan\alpha = \frac{3}{4}$, on aurait $f = \frac{6}{7}$.

Épreuve pratique. — *Un fil flexible, de poids négligeable*, ABCDE, *est attaché par ses deux extrémités*, A *et* E, *à deux points fixes* A *et* E *situés sur une même horizontale. Les quatre longueurs* AB, BC, CD, DE *sont égales chacune au côté de l'octogone régulier inscrit dans un cercle dont le diamètre serait* AE.

On suspend au point C *un poids de* 10^{kg}; *quels poids faut-il suspendre en* B *et* D *pour que le fil prenne la forme d'un demi-octogone régulier? On calculera ces poids à* 1^g *près.*

Solution.

$$P = 10^{kg}(\sqrt{2} + 1) = 24^{kg},142.$$

(Novembre 1914.)

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES.

1908.

(1901, p. 48.)

Un point matériel est sollicité par une force centrale qui est fonction de la distance du point au centre fixe et

est exprimée par $f(r)$: démontrer que le rayon de courbure des courbes tautochrones pour ladite force est donné par la formule

$$\frac{1}{\rho} = \frac{d}{r\,dr}\left[r\sqrt{1 - 2K^2\frac{U(r)}{U'^2(r)}}\right] \quad (^1),$$

après avoir posé

$$U(r) = \int_r^{r_0} f(r)\,dr,$$

r_0 étant le rayon vecteur correspondant au point de tautochronisme. VITTORIO NOBILE.

SOLUTION

PAR UN ABONNÉ.

Prenons dans le plan un système de coordonnées polaires r et θ, ayant pour origine le centre fixe. La condition de tautochronisme donne la relation

$$(1) \qquad U(r) - U(r_0) = -\frac{K^2 s^2}{2},$$

qui n'est autre, au fond, que l'équation de la courbe dans le système de coordonnées r et s.

D'autre part, d'après une formule connue, le rayon de courbure ρ est égal à

$$\rho = \frac{r\,dr}{dp},$$

où p désigne la distance du pôle à la tangente de la courbe. En appelant V l'angle sous lequel le rayon vecteur coupe la courbe, on a

$$p = r\sin V = \frac{r^2\,d\theta}{ds} = r\sqrt{1 - \frac{dr^2}{ds^2}}.$$

En tirant la valeur de $\frac{dr}{ds}$ de la relation (1), en la portant dans la relation précédente et remplaçant ensuite p, dans l'expression du rayon de courbure, par sa valeur, on trouve la formule demandée.

([1]) Formule rectifiée (voir *Nouvelles Annales*, 1901, p. 192, *errata*).

1950.

(1902, p. 576.)

D'un point M *du plan d'une ellipse on peut mener huit droites coupant l'ellipse en* N_1, N_2, N_3, ..., N_8, *sous un angle constant* θ. *Le lieu des points* M *tels que*

$$\sum_1^8 \overline{MN_i}^2 = \text{const.}$$

est une conique. E.-N. Barisien.

Solution

Par un Abonné.

Soient α, β les coordonnées de M et x_i, y_i ($i = 1, 2, 3, \ldots, 8$) celles des points N_1, N_2, N_3, ..., N_8.

En désignant par m et m' les coefficients angulaires de la tangente à l'ellipse au point N_i et de la droite MN_i et posant $\tan\theta = k$, on doit avoir

$$\frac{m - m'}{1 + mm'} = \pm k.$$

Choisissons le signe +, remplaçons m par sa valeur et supprimons provisoirement l'indice i pour simplifier l'écriture, nous trouvons

$$m' = \frac{ka^2y + b^2x}{kb^2x - a^2y}.$$

En exprimant que cette droite, de coefficient angulaire m', passe en M, nous obtenons

$$b^2x^2 + kc^2xy + a^2y^2 + b^2(k\beta - \alpha)x - a^2(k\alpha + \beta)y = 0.$$

En éliminant successivement x et y entre cette équation et celle de l'ellipse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0,$$

on arrive aux deux équations

$$k^2c^4x^4 - 2ka^2c^2(k\alpha + \beta)x^3 + a^2[a^2(k\alpha + \beta)^2 + b^2(k\beta - \alpha)^2 - k^2c^4]x^2 + \ldots = 0,$$

$$k^2c^4y^4 + 2kb^2c^2(k\beta - \alpha)y^3 + b^2[b^2(k\beta - \alpha)^2 + a^2(k\alpha + \beta)^2 - k^2c^4]y^2 + \ldots = 0,$$

qui donnent les x et les y des points N_1 à N_4.

En y changeant le signe de k on obtient

$$\begin{aligned} &k^2 c^4 x^4 + 2 k a^2 c^2 (-k\alpha + \beta) x^3 \\ &\quad + a^2[a^2(-k\alpha+\beta)^2 + b^2(k\beta+\alpha)^2 - k^2 c^4] x^2 + \ldots = 0, \\ &k^2 c^4 y^4 + 2 k b^2 c^2 (k\beta + \alpha) y^3 \\ &\quad + b^2[b^2(k\beta+\alpha)^2 + a^2(k\alpha-\beta)^2 - k^2 c^4] y^2 + \ldots = 0, \end{aligned}$$

qui fournissent de même les coordonnées des points N_5 à N_8.

Cela posé on a

$$\sum_1^8 \overline{MN}_i^2 = \sum_1^8 [(\alpha - x_i)^2 + (\beta - y_i)^2];$$

c'est-à-dire

$$8(\alpha^2+\beta^2) - 2\alpha \sum_1^8 x_i - 2\beta \sum_1^8 y_i + \sum_1^8 x_i^2 + \sum_1^8 y_i^2;$$

ou bien

$$\begin{aligned} &8(\alpha^2+\beta^2) - 2\alpha \sum_1^8 x_i - 2\beta \sum_1^8 y_i + \left(\sum_1^4 x_i\right)^2 + \left(\sum_5^8 x_i\right)^2 \\ &\quad + \left(\sum_1^4 y_i\right)^2 + \left(\sum_5^8 y_i\right)^2 - 2\sum_1^4 x_1 x_2 - 2\sum_5^8 x_5 x_6 \\ &\quad - 2\sum_1^4 y_1 y_2 - 2\sum_5^8 y_5 y_6. \end{aligned}$$

Cette quantité doit être égale à une constante $4h^2$.

Si, au moyen des équations ci-dessus, on calcule les quantités qui y figurent, on trouve d'abord

$$\sum_1^8 x_i = \frac{4a^2\alpha}{c^2}, \qquad \sum_1^8 y_i = -\frac{4b^2\beta}{c^2}.$$

En calculant ensuite les autres quantités et les remplaçant dans la relation proposée, on trouve, après réductions et simplifications, que le lieu du point $M(\alpha, \beta)$ a pour équation

$$\alpha^2\left(a^2 - 2b^2 - \frac{b^2}{k^2}\right) + \beta^2\left(2a^2 - b^2 + \frac{a^2}{k^2}\right) = c^2(h^2 - a^2 - b^2).$$

C'est une conique ayant mêmes axes et même centre que l'ellipse donnée.

REMARQUES

Par l'AUTEUR.

I. *Le lieu des points* M *tels que*

$$\sum_{1}^{4} \overline{\mathrm{MN}}_i^2 = \text{const.} = 4p^2$$

est la conique

$$\left(a^2 - 2b^2 - \frac{b^2}{k^2}\right)x^2 + \left(2a^2 - b^2 + \frac{a^2}{k^2}\right)y^2$$
$$+ \frac{2(k^2-1)}{k}(a^2+b^2)xy = c^2(2p^2 - a^2 - b^2).$$

II. *Le lieu des points* M *tels que*

$$\sum_{5}^{8} \overline{\mathrm{MN}}_i^2 = \text{const.} = 4q^2$$

est la conique

$$\left(a^2 - 2b^2 - \frac{b^2}{k^2}\right)x^2 + \left(2a^2 - b^2 + \frac{a^2}{k^2}\right)y^2$$
$$- \frac{2(k^2-1)}{k}(a^2+b^2)xy = c^2(2q^2 - a^2 - b^2).$$

III. Si $k^2 = \dfrac{b^2}{a^2 - 2b^2}$, lorsque $a > b\sqrt{2}$, la conique du lieu

$$\sum_{1}^{8} \overline{\mathrm{MN}}_i^2 = 4h^2$$

se compose alors d'un système de deux droites parallèles au grand axe.

IV. Si $k = \pm 1$, cette conique devient

$$\alpha^2(a^2 - 3b^2) + \beta^2(3a^2 - b^2) = c^2(h^2 - a^2 - b^2).$$

V. Si $h^2 = a^2 + b^2$, quelle que soit la valeur de k, la conique se compose de deux droites qui passent par le centre de l'ellipse donnée.

VI. Les relations

$$\sum_1^8 x_i = \frac{4a^2\alpha}{c^2}, \qquad \sum_1^8 y_i = -\frac{4b^2\beta}{c^2}$$

sont indépendantes à la fois de l'angle dont la tangente est k, et de la longueur h.

Il en résulte que : *le rapport de l'ordonnée (ou de l'abscisse) du centre des moyennes distances des huit points* N_i *à l'ordonnée (ou l'abscisse) du point* M *est constant et égal à* $\frac{a^2}{2c^2}$ $\left(ou - \frac{b^2}{2c^2}\right)$.

VII. On a aussi la curieuse relation

$$\frac{\sum_1^4 x_1 x_2}{\sum_1^4 y_1 y_2} = \frac{\sum_5^8 x_5 x_6}{\sum_5^8 y_5 y_6} = \text{const.} = \frac{a^2}{b^2}.$$

VIII. On trouve encore les lieux suivants :

1° *Le lieu des points* M *tels que*

$$x_1 x_2 x_3 x_4 = \text{const.},$$
$$ou \quad y_1 y_2 y_3 y_4 = \text{const.},$$
$$ou \quad x_5 x_6 x_7 x_8 = \text{const.},$$
$$ou \quad y_5 y_6 y_7 y_8 = \text{const.}$$

se compose chacun de deux droites parallèles.

2° *Le lieu des points* M *tels que*

$$\frac{y_1}{x_1}\frac{y_2}{x_2}\frac{y_3}{x_3}\frac{y_4}{x_4} = \text{const.}$$

ou

$$\frac{y_5}{x_5}\frac{y_6}{x_6}\frac{y_7}{x_7}\frac{y_8}{x_8} = \text{const.}$$

est chacun une hyperbole.

2012.

(1905, p. 144.)

Le polyèdre homogène à un seul côté de Möbius a six sommets pentaèdres A, B, C, D, E, F, *et dix faces triangulaires*

BCD, CDE, DEF, EFB, FBC,
ABD, ADF, AFC, ACE, AEB,

en mettant par exemple en évidence l'angle pentaèdre en A. *La quadrique qui touche les plans des faces autres que* EFD, *et celle qui touche les plans des faces autres que* EFB, *ont leurs points de contact avec le plan* ADB *en ligne droite avec* A, *puisqu'elles touchent cinq mêmes plans issus de* A; *démontrer que le conjugué harmonique de* A *par rapport à ces points de contact est sur* DB. (*On peut remplacer* A *par* C.) G. Fontené.

Solution

Par l'Auteur.

Le polyèdre de Möbius a un seul côté, et l'on a

$$F + S = A + 1.$$

On peut l'obtenir en partant d'une ligne brisée pentagonale BCDEF dont on mène les diagonales pour avoir cinq faces; ces diagonales forment une ligne brisée pentagonale BDFCE, et les cinq dernières faces sont les triangles qui ont pour bases les côtés de cette ligne brisée et pour sommet un point donné A.

Les deux points A et C jouent le même rôle dans la question, et il en est de même des deux points B et D; nous prendrons le tétraèdre ABCD comme tétraèdre de référence. Comme il s'agit de quadriques tangentes à des plans, nous emploierons des coordonnées tangentielles; les coordonnées

tangentielles u, v, w, r d'un plan étant les produits par des constantes des distances des points A, B, C, D à ce plan, l'équation tangentielle d'un sommet A est $u=0$, c'est-à-dire que la coordonnée u est nulle pour tout plan passant en A, les équations tangentielles d'une arête AB sont $u=0$, $v=0$, c'est-à-dire que u et v sont nulles pour tout plan passant par AB, et enfin on a $u=0$, $v=0$, $w=0$ pour le plan ABC.

Les deux quadriques sont tangentes aux plans BDC, BDA; la seule coordonnée non nulle étant u pour le premier plan, w pour le second, les équations tangentielles des deux quadriques manquent de termes en u^2 et en w^2; si l'on met en évidence les plans tangents menés par AC ($u=0$, $w=0$), ces équations sont de la forme

$$(1)\quad (v+ur)(r+mv)+v(au+cw)+r(\alpha u+\gamma w)+kuw=0.$$

Les deux quadriques ont cinq plans tangents communs issus de A, donc même cône circonscrit de sommet A ($u=0$); même observation pour le sommet C ($w=0$); si l'équation ci-dessus représente la première quadrique, on aura l'équation de la seconde en remplaçant k par k'.

Les points de contact M et M' avec le plan ABD ont pour équations $f'_w=0$, $\varphi'_w=0$, ou

$$cv+\gamma r+ku=0,\qquad cv+\gamma r+k'u=0;$$

le point A est sur la droite qui joint ces deux points (on le sait *a priori*), ainsi que le point N qui a pour équation $cv+\gamma r=0$, point situé sur BD; M et M' seront conjugués par rapport aux points A et N si l'on a

$$k+k'=0.$$

Le point E est l'intersection des trois plans tangents EBA, EAC, ECD, et le point F est l'intersection des trois plans tangents FDA, FAC, FCB. On a pour les trois plans qui se coupent en E

$$u=0,\qquad v=0,\qquad \mu r+\gamma w=0,$$
$$u=0,\qquad w=0,\qquad v+\mu r=0,$$
$$w=0,\qquad r=0,\qquad mv+au=0;$$

et, pour les trois plans qui se coupent en F,

$$u = 0, \qquad r = 0, \qquad mv + cw = 0,$$
$$u = 0, \qquad w = 0, \qquad r + mv = 0,$$
$$w = 0, \qquad v = 0, \qquad \mu r + \alpha u = 0;$$

l'équation tangentielle du point E est alors

$$\text{(E)} \qquad mv + au + m(\mu r + \gamma w) = 0,$$

et celle du point F est

$$\text{(F)} \qquad \mu r + \alpha u + \mu(mv + cw) = 0.$$

La première quadrique doit être tangente au plan EFB, la seconde au plan EFD. L'équation du point B étant $v = 0$, les équations

$$au + m(\mu r + \gamma w) = 0, \qquad (\mu r + \alpha u) + \mu c w = 0,$$
$$\mu r^2 + r(\alpha u + \gamma w) + kuw = 0$$

doivent être compatibles; la dernière peut s'écrire

$$r(\mu r + \alpha u)\gamma wr + kuw = 0,$$

et elle devient, en tenant compte de la seconde et en supprimant le facteur w qui n'est pas nul,

$$(\gamma - \mu c)r + ku = 0;$$

on doit donc avoir, en considérant les trois équations linéaires et homogènes en u, w, r,

$$\begin{vmatrix} a & m\gamma & m\mu \\ \alpha & \mu c & \mu \\ k & 0 & \gamma - \mu c \end{vmatrix} = 0$$

ou

$$(\gamma - \mu c)(m\mu k + \mu a c - m\alpha\gamma) = 0,$$

$$k = \frac{\alpha\gamma}{\mu} - \frac{ac}{m}.$$

Si l'on échange v et r dans l'équation (1), en échangeant les lettres romaines et les lettres grecques, cette équation se reproduit; les mêmes échanges ne font qu'échanger les points E et F; il en résulte que, pour la seconde quadrique

qui doit être tangente au plan EFD, tandis que la première était tangente au plan EFB, on a

$$k' = \frac{ac}{m} - \frac{\alpha\gamma}{\mu} = -k;$$

c'est ce qu'il fallait obtenir.

2243.

(Énoncé complété : *voir* 1915, p. 143 et 1916, p. 47.)

Étant données deux droites D *et* Δ *rectangulaires, ne se rencontrant pas, et, dans un plan perpendiculaire à* D, *un cercle* C *ayant son centre* O *sur cette droite, on considère la surface réglée du quatrième ordre ayant pour directrices* D, Δ *et* C (*bien connue en stéréotomie comme constituant l'intrados de la voûte dite* « *arrière-voussure de Montpellier* »).

Démontrer « *géométriquement* » :

1° *Que la section de cette surface par tout plan perpendiculaire à* D *est une conchoïde de Nicomède de pôle* O;

2° *Que la section de la surface par tout plan* P *contenant le diamètre de* C *parallèle à* Δ *est une conique dont la projection sur le plan* Π *de* C *rencontre ce cercle en deux points fixes, réels ou imaginaires, admet pour foyer le point* O *et pour directrice correspondant à ce foyer la projection, sur le plan* Π, *de la trace du plan* P *sur celui mené par* Δ *parallèlement à* Π.

M. d'Ocagne.

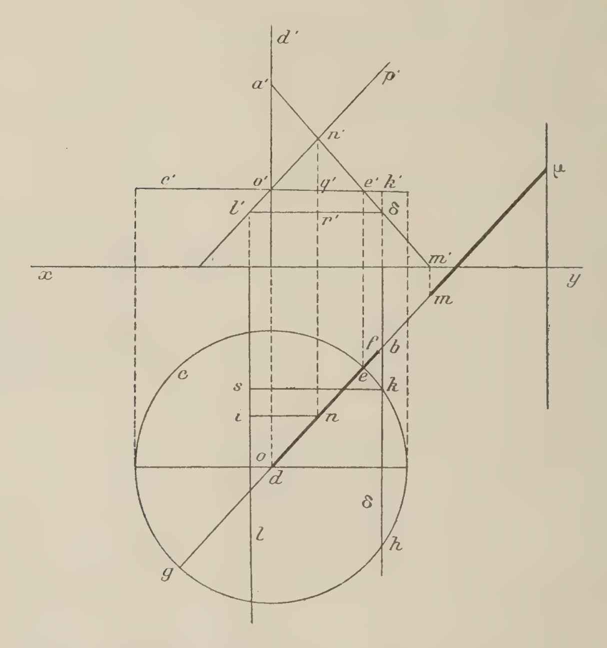
Solution
Par M. J. Lemaire.

1° Prenons le plan sécant pour plan horizontal de projection, et un plan perpendiculaire à Δ pour plan vertical, et soient (d, d'), (δ, δ'), (c, c') les trois directrices de la surface; construisons une génératrice qui s'appuie sur elles en (d, a'), (b, δ') et (e, e') respectivement, et a pour trace horizontale (m, m'); on a

$$\frac{mb}{me} = \frac{m'\delta'}{m'e'} = \text{const.},$$

soient k cette constante et f le point de om tel que $\frac{fo}{fg} = k$, en

désignant par g le point diamétralement opposé à e sur le cercle c, et par (o, o') le centre du cercle.



Sur la droite om, prenons le point μ tel que $m\mu = of$, et prouvons que le lieu de μ est une droite : les segments de droite qui entrent dans les égalités étant supposés affectés de signes, nous pouvons écrire

$$mb = k.me,$$
$$m\mu = k.gf,$$

d'où

$$\begin{aligned} bm + m\mu &= k(em + gf), \\ &= k(em + go + of), \\ &= k(oe + em + m\mu), \end{aligned}$$

c'est-à-dire

$$b\mu = k.o\mu,$$

égalité qui prouve que μ décrit une parallèle à δ, et, puisque $m\mu$ a une longueur constante, que le lieu de m est une *conchoïde de Nicomède*.

2° Le plan P est de bout, et sa trace verticale p' passe en o'; (n, n') étant le point où il coupe la génératrice considérée ci-dessus, il s'agit d'obtenir le lieu de n.

Soient (l, l') la droite de bout du plan P située dans le plan horizontal contenant Δ, ni la distance de n à l, q' et r' les points où la ligne de rappel nn' rencontre c' et $\delta' l'$, k' celui où la ligne de rappel de δ' rencontre c', k et h les points communs à cette ligne et à c, s la projection de k sur l; la figure donne

$$\frac{no}{ni} = \frac{no}{r'l'},$$

$$\frac{r'l'}{\delta' l'} = \frac{q'o'}{e'o'} = \frac{no}{eo},$$

d'où

$$\frac{no}{ni} = \frac{eo}{\delta' l'} = \frac{ko}{ks} = \text{const.};$$

le lieu de n est donc la conique admettant o pour foyer, l pour directrice correspondante, et passant par les points, réels ou imaginaires, où la droite δ coupe le cercle c.

Autres solutions de MM. R. Bouvaist et M. Faucheux.

2246.

(1915, p. 144.)

On fait rouler intérieurement un cercle, de rayon $\frac{3a}{2}$, sur un cercle de rayon a et l'on demande : l'enveloppe d'un diamètre du cercle mobile invariablement lié à ce cercle; le lieu des extrémités de ce diamètre.

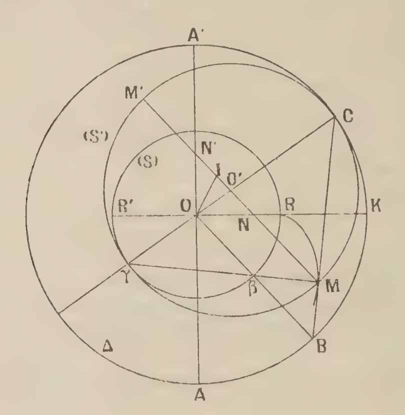
F. Balitrand.

Solution
Par M. J. Lemaire.

Rappelons que si un cercle (S') de rayon $r' = \frac{(n+1)r}{n}$ roule sur un cercle fixe S de rayon r, n étant un nombre entier, de manière que ces cercles soient tangents intérieurement, tout point du cercle mobile décrit une épicycloïde à n rebroussements, et que si un cercle S'' de rayon $r'' = \frac{(n-1)r}{n}$ roule sur le même cercle fixe (S), ces deux cercles étant encore

tangents intérieurement, tout point du cercle mobile décrit une hypocycloïde à n rebroussements.

Donc si $r = a$, et $r' = \frac{3a}{2}$, les extrémités d'un diamètre MM' du cercle (S') décrivent chacune une néphroïde; les points de rebroussement de ces deux épicycloïdes sont les extrémités de deux diamètres rectangulaires du cercle (S).



D'autre part, on sait que si un cercle (S') roule sur un cercle fixe (S), un diamètre MM' du cercle mobile enveloppe la courbe décrite par un point du cercle (Σ), de rayon moitié de celui de (S'), touchant (S) au même point et de la même manière que (S') [*voir*, par exemple, le *Cours de Géométrie* de Mannheim].

Dans le cas actuel, le rayon de (Σ) valant $\frac{3a}{4}$, MM' enveloppe une hypocycloïde à quatre rebroussements qui se confondent avec les rebroussements des deux épicycloïdes précédentes.

Nous allons établir autrement ces résultats : soient O le centre du cercle fixe (S), O' celui du cercle mobile (S') pour une position arbitraire de ce cercle, RM l'arc de la courbe (E) lieu de M à partir de la position où ce point coïncidait avec le point de contact des deux cercles, γ le point de contact de (S) et (S'), C le point diamétralement opposé à γ sur (S'), (Δ) le cercle de centre O et de rayon $2a$, qui touche (S') en C; Mγ est la normale en M à (E), MC la tangente; si B est le

second point où MC coupe (Δ) et β le second point où $M\gamma$ coupe (S), OB passe en β et est parallèle à MM'. Le rayon OR coupant (Δ) en K, prenons dans le sens de B vers C, l'arc KA égal à un quadrant; si ω désigne la mesure en degrés de l'angle $\widehat{O\gamma\beta}$, l'arc γM vaut $(180-2\omega)$ degrés, l'arc γR de même longueur vaut $\frac{3}{2}(180-2\omega)$ degrés; par suite, l'arc BK vaut, comme l'arc BR, un nombre de degrés égal à la différence des nombres qui expriment les arcs γR et $\gamma\beta$, c'est-à-dire $(90-\omega)$ degrés.

Il en résulte que l'arc AB contient ω degrés; et puisque l'arc BC en contient 2ω, l'arc AC est le triple de l'arc AB : donc, d'après le mode de génération tangentielle des épicycloïdes, la droite BC, tangente en M à la courbe (E) lieu de ce point, enveloppe une épicycloïde à deux rebroussements, dont les sommets sont les points A et A' diamétralement opposés de (Δ) et les rebroussements les points R et R' diamétralement opposés de (S).

Le lieu de M' est la courbe obtenue en faisant tourner la précédente de 90° autour de O.

Observons que M est au quart de BC à partir de B.

Il serait aisé d'obtenir pour l'enveloppe de MM' un mode de génération tangentielle analogue; mais on peut aussi trouver cette enveloppe comme il suit : N et N' désignant les points où MM' coupe RR' et AA', l'angle $\widehat{ON'N}$ vaut, comme $\widehat{AOB}$, ω degrés: $\widehat{OO'N'}=\widehat{COB}=2\omega$; si donc I est le point de NN' tel que $\widehat{OIN}=2\omega$, ce point est le milieu de NN'; et comme $OI=OO'=\frac{a}{2}$, le segment de droite NN' est égal au rayon a de (S), et la droite MM' enveloppe l'hypocycloïde ayant pour rebroussements les points R et R' de ce cercle et les extrémités du diamètre perpendiculaire à RR'.

Autre solution, de l'auteur.

2251.

(1915, p. 391.)

Les coordonnées tétraédriques d'une droite MM' *étant*

les quantités

$$l = yz' - zy', \qquad m = zx' - xz', \qquad n = xy' - yx',$$
$$\lambda = xt' - tx', \qquad \ldots$$

la quadrique qui a pour équation ponctuelle

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dt^2 = 0$$

a pour équation en coordonnées de droites tangentes

$$(l\sqrt{BC} + \lambda\sqrt{AD})^2 + (m\sqrt{CA} + \mu\sqrt{BD})^2 + \ldots = 0,$$

ou encore

$$(l\sqrt{BC} - \lambda\sqrt{AD})^2 + (m\sqrt{CA} - \mu\sqrt{BD})^2 + \ldots = 0$$

avec

$$\sqrt{BC}\sqrt{AD} = \sqrt{CA}\sqrt{BD} = \sqrt{AB}\sqrt{CD}.$$

Les génératrices sont données par les relations

$$\begin{aligned} l\sqrt{BC} &= \varepsilon\lambda\sqrt{AD} \\ m\sqrt{CA} &= \varepsilon\mu\sqrt{BD} \qquad (l\lambda + m\mu + n\nu = 0). \\ n\sqrt{AB} &= \varepsilon\nu\sqrt{CD} \end{aligned}$$

G. Fontené.

SOLUTION

Par M. R. Bouvaist.

L'équation aux ρ des points d'intersection de MM' avec la quadrique donnée est

$$\rho^2(Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dt^2) \\ + 2\rho(Axx' + Byy' + Czz' + Dtt') \\ + Ax'^2 + By'^2 + Cz'^2 + Dt'^2) = 0.$$

MM' sera tangente à cette surface si l'on a

$$(Axx' + Byy' + Czz' + Dtt')^2 \\ - (Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dt^2) \\ \times (Ax'^2 + By'^2 + Cz'^2 + Dt'^2) = 0,$$

expression qui peut s'écrire

$$\begin{aligned}AB(xy'-yx')^2 + AC(xz'-zx')^2 + AD(xt'-tx')^2 \\ + BC(yz'-zy')^2 + BD(yt'-ty')^2 + CD(zt'-tz')^2 = 0,\end{aligned}$$

ou encore, en supposant

$$\sqrt{BC}\sqrt{AD} = \sqrt{CA}\sqrt{BD} = \sqrt{AB}\sqrt{CB} = \sqrt{ABCD},$$

$$\begin{aligned}(l\sqrt{BC} \pm \lambda\sqrt{AD})^2 + [m\sqrt{CA} \pm \mu\sqrt{BD}]^2 \\ + [n\sqrt{AB} \pm \nu\sqrt{CD}]^2 = 0,\end{aligned}$$

puisque

$$l\lambda + m\mu + n\nu \equiv 0.$$

Et si l'on a

$$l\sqrt{BC} = \varepsilon\lambda\sqrt{AD},$$
$$m\sqrt{CA} = \varepsilon\mu\sqrt{BD},$$
$$n\sqrt{AB} = \varepsilon\nu\sqrt{CD},$$

la droite MM' sera sur la surface considérée, on retrouve ainsi les deux systèmes de génératrices.

2259.

(1915, p. 477.)

Soit PQR *le triangle formé par les tangentes aux pieds des normales à une ellipse* (E) *issues d'un point de cette ellipse. Démontrer que le triangle* PQR *est inscrit à une ellipse passant par les sommets de la développée de* (E).

T. Ono.

Solution

Par M. J. Lemaire.

Cette proposition a été obtenue comme conséquence de la question 1816. Mais en voici une démonstration directe : soit $M(\alpha, \beta)$ un point d'où partent quatre normales MA, Mp, Mq, Mr à l'ellipse (E); les tangentes à l'ellipse aux pieds de ces normales forment un quadrilatère complet dont P', Q', R' sont trois sommets situés sur la tangente en A, et P, Q, R les trois autres sommets respectivement opposés aux précédents; les coordonnées de ces points sont liées à celles de M

par les formules de Desboves

$$\alpha = -\frac{c^2x(y^2-b^2)}{a^2y^2+b^2x^2},$$
$$\beta = \frac{c^2y(x^2-a^2)}{a^2y^2+b^2x^2}.$$

Si nous écrivons que M est en A sur l'ellipse, nous obtenons le lieu géométrique de ces sommets

$$c^4b^2x^2(y^2-b^2)^2+c^4a^2y^2(x^2-a^2)^2-a^2b^2(a^2y^2+b^2x^2)^2=0$$

ou

$$(c^4x^2y^2-b^6x^2-a^6y^2)(a^2x^2+b^2y^2-c^4)=0.$$

Le premier facteur donne le lieu de P', Q', R' qui est le lieu des pôles des normales de (E); l'autre donne le lieu de P, Q, R

$$a^2x^2+b^2y^2-c^4=0,$$

c'est l'ellipse ayant pour sommets les points de rebroussement de la développée, ce qui démontre la proposition.

On peut encore l'établir comme il suit : on sait que P est le *centre* de Ap, en appelant *centre d'une droite* le point dont les projections sur les axes sont symétriques, par rapport à l'origine, des traces de la droite sur les mêmes axes. Si donc M vient en A, sur l'ellipse, P, Q, R sont les centres des normales issues de A; or nous avons démontré (*N. A.*, 1915, p. 304) que le lieu des centres des normales est l'ellipse qui a ses sommets aux points de rebroussement de la développée de (E); rappelons aussi que les normales à cette ellipse aux points P, Q, R concourent et que le cercle passant par ces points contient le centre de (E) (*N. A.*, 1915, p. 308 et 312).

Autre solution de M. R. Bouvaist. *Voir* aussi, p. 84, Corresp., M. F. Balitrand.

ERRATUM.

1916, page 389, ligne 12, *au lieu de* 1914, *lire* 1894.

[M¹5kα]

SUR UNE MANIÈRE DE CONSTRUIRE LES CUBIQUES CIRCULAIRES;

PAR M. F. GOMES TEIXEIRA.

1. Le nombre des méthodes qu'on a données pour la construction des cubiques circulaires non unicursales est bien petit. Casey en a donné une dans les *Transactions of the Royal Irish Academy* (t. XXIV, 1867), que nous avons exposée dans notre *Traité des courbes spéciales* (t. I, p. 80), et Czuber en a donné une autre dans le *Zeitschrift für Mathematik* (t. XXXII, 1887), laquelle a été indiquée par M. Loria dans son *Spezielle Ebene Kurven* (t. I, p. 34). Il ne sera donc pas inutile d'en donner ici une autre qui n'a pas été encore signalée, croyons-nous.

La méthode que nous allons exposer est basée sur le théorème suivant :

Prenons sur un plan quatre points A, B, A_1, B_1. *Par le point* B *menons une droite* (D) *de direction arbitraire et désignons par* C *le point où elle coupe la droite* AA_1. *Ensuite marquons sur cette droite un point* C_1 *tel que le rapport des distances de* C *et* C_1 *au point* A *soit égal à une constante donnée* c, *et décrivons une circonférence passant par* A_1, B_1 *et* C_1. *Cette circonférence coupe la droite* (D) *en deux points qui décrivent une cubique circulaire, quand la direction de la droite varie.*

Prenons pour origine des coordonnées orthogonales le point A et pour axe des abscisses la droite AA_1, et désignons respectivement par (a, b), $(h, 0)$, (a_1, b_1) les coordonnées des points B, A_1 et B_1. L'équation d'une droite arbitraire (D) passant par B est

$$(1) \qquad y - b = m(x - a),$$

et cette droite coupe l'axe des abscisses en un point C dont l'abscisse est déterminée par l'égalité

$$x_1 = a - \frac{b}{m}.$$

L'équation d'un cercle passant par le point A_1 et ayant le centre en un point (α_1, β_1) est

$$x^2 + y^2 - 2\alpha_1 x - 2\beta_1 y = h^2 - 2h\alpha_1,$$

et la condition pour que ce cercle passe par le point B_1 est, par suite,

$$a_1^2 + b_1^2 - 2\alpha_1 a_1 - 2\beta_1 b_1 = h^2 - 2h\alpha_1.$$

Donc, en supposant b_1 différent de zéro, l'équation des cercles passant par A_1 et B_1 est

$$(2) \quad \left\{ \begin{array}{l} b_1(x^2+y^2) - 2\alpha_1 b_1 x - (a_1^2 + b_1^2 - 2a_1\alpha_1 + 2h\alpha_1 - h^2)y \\ \quad = b_1(h^2 - 2h\alpha_1). \end{array} \right.$$

Ce cercle coupe l'axe des abscisses au point A_1 et en un autre point C_1 dont l'abscisse est déterminée par l'équation

$$x_2 = 2\alpha_1 - h,$$

et l'on a par hypothèse

$$(3) \qquad \frac{x_1}{x_2} = \frac{ma - b}{m(2\alpha_1 - h)} = c.$$

En éliminant maintenant m et α_1 entre les équa-

tions (1), (2) et (3), on obtient l'équation du lieu décrit par les points d'intersection de la droite (D) et du cercle considéré, quand h varie, savoir :

$$(4)\quad \begin{cases} [(ch+a)(y-b)-b(x-a)][b_1x+(h-a_1)y-hb_1] \\ \quad = c(y-b)[b_1(x^2+y^2)-(a_1^2+b_1^2-h^2)y-b_1h^2], \end{cases}$$

ou

$$(5)\quad \begin{cases} cb_1(x^2+y^2)y \\ \quad = bb_1(c-1)x^2+[(ch+a)b_1-b(h-a_1)]xy \\ \qquad +[c(a_1^2+b_1^2+bb_1-ha_1)+a(h-a_1)]y^2 \\ \qquad +bb_1h(1-c)x+[bc(ha_1-a_1^2-b_1^2)-ahb_1]y. \end{cases}$$

On voit, au moyen de l'équation (4), que la courbe cherchée passe par les points A, A_1, B, B_1 et, au moyen de l'équation (5), qu'elle est une *cubique circulaire*, dont l'asymptote est parallèle à la droite AA_1.

2. En passant maintenant à la question inverse, considérons la cubique circulaire représentée par l'équation

$$(6)\qquad (x^2+y^2)y = \mathrm{H}x^2+\mathrm{K}xy+\mathrm{L}y^2+\mathrm{M}x+\mathrm{N}y,$$

rapportée à un système d'axes orthogonaux qui ont pour origine un point de la courbe et pour axe des abscisses une parallèle à l'asymptote réelle.

Les conditions, pour que les cubiques représentées par les équations (5) et (6) soient identiques, sont

$$b(c-1)=\mathrm{H}c,\qquad hb(1-c)=\mathrm{M}c,$$
$$c(a_1^2+b_1^2+bb_1-ha_1)+a(h-a_1)=\mathrm{L}cb_1,$$
$$(ch+a)b_1-b(h-a_1)=\mathrm{K}cb_1,$$
$$bc(ha_1-a_1^2-b_1^2)-ahb_1=\mathrm{N}cb_1.$$

Nous avons donc cinq équations pour déterminer les six constantes c, a, b, a_1, b_1, h, dont une reste par conséquent arbitraire; et, comme une de ces équations peut être remplacée par celle qui exprime

que (a, b) est un point de la cubique, on voit qu'on peut prendre le point (a, b) arbitrairement sur la courbe.

Les deux premières équations donnent

$$h = -\frac{M}{H}, \qquad c = \frac{b}{b - H}$$

et déterminent donc c et h.

Les deux dernières équations font voir que le point (a_1, b_1) est l'un des points d'intersection de la droite représentée par l'équation

$$(7) \qquad (ch + a - Kc)y + bx = bh$$

avec le cercle représenté par celle-ci

$$(8) \qquad bc(x^2 + y^2) + (Nc + ah)y - bchx = 0;$$

l'autre point d'intersection est le point $(h, 0)$.

Nous pouvons donc construire la cubique (6), et d'une infinité de manières, au moyen de la méthode qui résulte du théorème énoncé au numéro précédent.

Il résulte encore, de ce qu'on vient d'exposer, le théorème suivant :

Prenons sur une cubique circulaire quelconque quatre points A, A_1, B, B_1 *tels que les points* A *et* A_1 *soient placés sur une parallèle à l'asymptote réelle et le point* B_1 *coïncide avec le second point d'intersection de la droite* (7) *avec le cercle* (8). *Un cercle quelconque passant par* A_1 *et* B_1 *coupe la cubique en deux points situés sur une droite passant par* B, *et le cercle et la droite coupent la droite* AA_1 *en deux points* C_1 *et* C *tels que le rapport de* AC *à* AC_1 *est constant.*

3. Ce qu'on vient de dire aux numéros précédents

est applicable aux cubiques circulaires unicursales et non unicursales. On en peut déduire, au moyen d'un passage à la limite, d'autres théorèmes applicables seulement aux cubiques circulaires unicursales.

Supposons qu'on fasse coïncider le point A_1 avec le point A et que le point B_1 tende vers le point A, en décrivant une droite représentée par l'équation $x = ky$. On a alors, en posant $h = 0$, $a_1 = kb_1$, et ensuite $b_1 = 0$, l'équation

$$(9) \qquad c(x^2 + y^2)y = b(c - 1)x^2 + (a + bk)xy + (cb - ak)y^2,$$

qui représente une cubique circulaire unicursale ayant le point double à l'origine A. Les cercles (2), qui passent par A_1 et B_1, deviennent à la limite tangentes à la droite $x = ky$ au point A.

Nous avons donc le théorème suivant :

Prenons sur un plan deux droites (D_1) *et* (D_2) *et un point* B. *Par ce dernier point menons une droite* D *de direction variable et désignons par* C *le point où elle coupe la droite* (D_1). *Ensuite marquons sur cette droite un point* C_1 *tel que le rapport de* AC *à* AC_1 *soit égal à une constante c, et décrivons une circonférence tangente à la droite* (D_2) *au point* A *et qui passe par le point* C_1. *Cette circonférence coupe la droite* (D) *en deux points qui décrivent une cubique circulaire unicursale ayant le point double à* A, *quand la direction de la droite varie. L'asymptote de cette cubique est parallèle à la droite* (D_1). *Cette cubique est représentée par l'équation* (9), *k étant la tangente trigonométrique de l'angle des droites* (D_1) *et* (D_2).

4. Réciproquement, si l'on donne la cubique repré-

sentée par l'équation

$$(x^2+y^2)y = \mathrm{H}x^2 + \mathrm{K}xy + \mathrm{L}y^2,$$

les conditions pour que cette cubique soit identique à celle que l'équation (9) représente sont

$$(10)\quad b(c-1) = c\mathrm{H}, \qquad a+bk = c\mathrm{K}, \qquad cb-ak = c\mathrm{L}.$$

Ces équations déterminent trois des constantes a, b, c, k, l'autre restant arbitraire.

Si la constante qui reste arbitraire est k, on peut déterminer b, au moyen de l'équation

$$b = \frac{\mathrm{H}k^2 + \mathrm{K}k + \mathrm{L}}{1+k^2}$$

et ensuite c et a, au moyen des deux équations (10).

Nous avons donc le théorème suivant :

Prenons sur le plan d'une cubique circulaire unicursale deux droites (D_1) *et* (D_2) *passant par son point double* A, *et dont la première soit parallèle à l'asymptote réelle. Traçons ensuite un cercle de rayon variable tangent à la droite* (D_2) *au point* A. *Ce cercle coupe la cubique en deux points placés sur une droite qui passe par un point fixe* B. *Cette droite et le cercle coupent la droite* (D_1) *en deux points* (C) *et* (C_1) *tels que le rapport de* AC *à* AC_1 *est constant.*

Si la droite (D_2) est perpendiculaire à la droite (D_1), l'équation (9) prend la forme la plus simple, savoir :

$$c(x^2+y^2)y = b(c-1)x^2 + axy + aby^2.$$

[L¹13a]

SUR LA PARABOLE TANGENTE A QUATRE DROITES;

PAR M. E.-N. BARISIEN.

Soient les quatre droites

$$y = m_1 x + p_1, \qquad y = m_2 x + p_2,$$
$$y = m_3 x + p_3, \qquad y = m_4 x + p_4.$$

L'équation à trouver doit être de la forme

$$(1) \qquad (x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = (x \cos\varphi + y \sin\varphi - a)^2.$$

La condition de tangence d'une droite

$$(2) \qquad y = mx + p$$

avec la parabole (1) s'obtiendra en exprimant que le symétrique Q du foyer F(α, β), par rapport à la droite (2), est sur la directrice

$$(3) \qquad x \cos\varphi + y \sin\varphi - a = 0.$$

La projection P de F sur la droite (2) s'obtient en résolvant les deux équations

$$y = mx + p, \qquad y - \beta = -\frac{1}{m}(x - \alpha),$$

ce qui donne, pour les coordonnées de P,

$$x_P = \frac{\alpha + \beta m - pm}{1 + m^2}, \qquad y_P = \frac{m\alpha + \beta m^2 + p}{1 + m^2}.$$

On a, pour celles de Q,

$$x_Q = 2x_P - x_F = \frac{2(\alpha + \beta m - pm)}{1 + m^2} - \alpha$$
$$= \frac{\alpha(1 - m^2) + 2\beta m - 2pm}{1 + m^2},$$
$$y_Q = 2y_P - y_F = \frac{2(m\alpha + m^2\beta + p)}{1 + m^2} - \beta$$
$$= \frac{2m\alpha - \beta(1 - m^2) + 2p}{1 + m^2}.$$

En portant ces valeurs dans l'équation (3), on a

$$\frac{[\alpha(1 - m^2) + 2\beta m - 2pm]\cos\varphi}{1 + m^2} + \frac{[2m\alpha - \beta(1 - m^2) + 2p]\sin\varphi}{1 + m^2} - a = 0,$$

ou

$$(4)\qquad \begin{aligned} &\alpha[(1 - m^2)\cos\varphi + 2m\sin\varphi] \\ &\quad + \beta[2m\cos\varphi - (1 - m^2)\sin\varphi] \\ &\quad - a(1 + m^2) + 2p(\sin\varphi - m\cos\varphi) = 0. \end{aligned}$$

La condition de tangence de la parabole (1) aux quatre droites données conduit donc aux quatre relations

$$(5)\qquad \left\{ \begin{aligned} &\alpha[(1 - m_1^2)\cos\varphi + 2m_1\sin\varphi] \\ &\quad + \beta[2m_1\cos\varphi - (1 - m_1^2)\sin\varphi] \\ &\quad - a(1 + m_1^2) + 2p_1(\sin\varphi - m_1\cos\varphi) = 0, \\ &\alpha[(1 - m_2^2)\cos\varphi + 2m_2\sin\varphi] \\ &\quad + \beta[2m_2\cos\varphi - (1 - m_2^2)\sin\varphi] \\ &\quad - a(1 + m_2^2) + 2p_2(\sin\varphi - m_2\cos\varphi) = 0, \\ &\alpha[(1 - m_3^2)\cos\varphi + 2m_3\sin\varphi] \\ &\quad + \beta[2m_3\cos\varphi - (1 - m_3^2)\sin\varphi] \\ &\quad - a(1 + m_3^2) + 2p_3(\sin\varphi - m_3\cos\varphi) = 0, \\ &\alpha[(1 - m_4^2)\cos\varphi + 2m_4\sin\varphi] \\ &\quad + \beta[2m_4\cos\varphi - (1 - m_4^2)\sin\varphi] \\ &\quad - a(1 + m_4^2) + 2p_4(\sin\varphi - m_4\cos\varphi) = 0. \end{aligned} \right.$$

Ces quatre relations permettent de déterminer α, β, a et φ.

Comme α, β et a y entrent linéairement, on aura par leur élimination l'équation suivante en φ :

$$(6)\quad \begin{vmatrix} (1-m_1^2)\cos\varphi+2m_1\sin\varphi & 2m_1\cos\varphi-(1-m_1^2)\sin\varphi & p_1(\sin\varphi-m_1\cos\varphi) & 1+m_1^2 \\ (1-m_2^2)\cos\varphi+2m_2\sin\varphi & 2m_2\cos\varphi-(1-m_2^2)\sin\varphi & p_2(\sin\varphi-m_2\cos\varphi) & 1+m_2^2 \\ (1-m_3^2)\cos\varphi+2m_3\sin\varphi & 2m_3\cos\varphi-(1-m_3^2)\sin\varphi & p_3(\sin\varphi-m_3\cos\varphi) & 1+m_3^2 \\ (1-m_4^2)\cos\varphi+2m_4\sin\varphi & 2m_4\cos\varphi-(1-m_4^2)\sin\varphi & p_4(\sin\varphi-m_4\cos\varphi) & 1+m_4^2 \end{vmatrix} = 0.$$

Or, cette équation est du troisième degré en $\sin\varphi$ et $\cos\varphi$.

Le problème paraît donc comporter *trois solutions*, alors qu'on sait qu'il n'y en a qu'une; car il est bien avéré qu'il n'existe qu'une seule parabole tangente à quatre droites !

L'équation (6) peut se simplifier un peu en posant

$$m_1 = \operatorname{tang}\frac{\omega_1}{2}, \qquad m_2 = \operatorname{tang}\frac{\omega_2}{2},$$

$$m_3 = \operatorname{tang}\frac{\omega_3}{2}, \qquad m_4 = \operatorname{tang}\frac{\omega_4}{2}.$$

Alors

$$\sin\omega_1 = \frac{2m_1}{1+m_1^2}, \qquad \cos\omega_1 = \frac{1-m_1^2}{1+m_1^2}, \qquad \ldots .$$

L'équation (6) peut donc s'écrire

$$(7)\quad \begin{vmatrix} \cos(\varphi-\omega_1) & \sin(\varphi-\omega_1) & p_1\cos\frac{\omega_1}{2}\sin\left(\varphi-\frac{\omega_1}{2}\right) & 1 \\ \cos(\varphi-\omega_2) & \sin(\varphi-\omega_2) & p_2\cos\frac{\omega_2}{2}\sin\left(\varphi-\frac{\omega_2}{2}\right) & 1 \\ \cos(\varphi-\omega_3) & \sin(\varphi-\omega_3) & p_3\cos\frac{\omega_3}{2}\sin\left(\varphi-\frac{\omega_3}{2}\right) & 1 \\ \cos(\varphi-\omega_4) & \sin(\varphi-\omega_4) & p_4\cos\frac{\omega_4}{2}\sin\left(\varphi-\frac{\omega_4}{2}\right) & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Cas particulier. — Les quatre droites sont :

$$y=0, \qquad y=x, \qquad y=2x+k, \qquad y=-x+q.$$

Alors

$$m_1=0, \quad p_1=0, \quad m_2=1, \quad p_2=0,$$
$$m_3=2, \quad p_3=k, \quad m_4=-1, \quad p_4=q,$$

L'équation (6) devient

$$\begin{vmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 & 1 \\ 2\sin\varphi & 2\cos\varphi & 0 & 2 \\ 4\sin\varphi-3\cos\varphi & 4\cos\varphi+3\sin\varphi & k(\sin\varphi-2\cos\varphi) & 5 \\ -2\sin\varphi & -2\cos\varphi & q(\sin\varphi+\cos\varphi) & 2 \end{vmatrix}=0.$$

J'ai pris ce cas particulier pour voir si l'équation en $\sin\varphi$ et $\cos\varphi$ se simplifie. On a

$$4k(\sin\varphi-2\cos\varphi)\begin{vmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 1 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 1 \\ -\sin\varphi & -\cos\varphi & 1 \end{vmatrix}$$
$$-2q(\sin\varphi+\cos\varphi)$$
$$\times\begin{vmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 1 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 1 \\ 4\sin\varphi-3\cos\varphi & 4\cos\varphi+3\sin\varphi & 5 \end{vmatrix}=0.$$

En développant les déterminants, on a

$$\begin{aligned} &2k(\sin\varphi-2\cos\varphi) \\ &\quad\times[\cos^2\varphi-\sin\varphi\cos\varphi \\ &\qquad+\sin^2\varphi+\sin\varphi\cos\varphi+\cos^2\varphi+\sin^2\varphi] \\ &-q(\sin\varphi+\cos\varphi) \\ &\quad\times[5\cos^2\varphi+\sin\varphi(4\cos\varphi+3\sin\varphi) \\ &\qquad-\sin\varphi(4\sin\varphi-3\cos\varphi) \\ &\qquad-\cos\varphi(4\sin\varphi-3\cos\varphi) \\ &\qquad-\cos\varphi(4\cos\varphi+3\sin\varphi)+5\sin^2\varphi]=0, \end{aligned}$$

ou

$$4k(\sin\varphi-2\cos\varphi)-q(\sin\varphi+\cos\varphi)\times 4=0,$$
$$k(\sin\varphi-2\cos\varphi)-q(\sin\varphi+\cos\varphi)=0.$$

Alors

$$(8) \qquad (k-q)\operatorname{tang}\varphi = 2k+q, \qquad \operatorname{tang}\varphi = \frac{2k+q}{k-q}.$$

Dans ce cas, il n'y a qu'une valeur de φ : il n'y a bien qu'une seule parabole.

Mais, dans le cas général, l'équation reste du troisième degré en $\sin\varphi$ et $\cos\varphi$.

Tout cela est bien singulier !

Les quatre équations (5) deviennent

$$(9) \qquad \alpha\cos\varphi - \beta\sin\varphi - a = 0,$$

$$(10) \qquad \alpha\sin\varphi + \beta\cos\varphi - a = 0,$$

$$(11) \qquad \begin{aligned} &\alpha(4\sin\varphi - 3\cos\varphi) \\ &+ \beta(4\cos\varphi + 3\sin\varphi) - 5a = 2k(2\cos\varphi - \sin\varphi), \end{aligned}$$

$$(12) \qquad \alpha\sin\varphi + \beta\cos\varphi + a = q(\sin\varphi + \cos\varphi).$$

Les équations (9) et (10) donnent

$$(13) \qquad \alpha = a(\cos\varphi + \sin\varphi), \qquad \beta = a(\cos\varphi - \sin\varphi).$$

Ces valeurs étant portées dans (12), il vient

$$\begin{aligned} &a[(\cos\varphi + \sin\varphi)\sin\varphi + (\cos\varphi - \sin\varphi)\cos\varphi + 1] \\ &\quad = q(\sin\varphi + \cos\varphi), \end{aligned}$$

$$(14) \qquad 2a = q(\sin\varphi + \cos\varphi).$$

Or, d'après (8),

$$(15) \left\{ \begin{aligned} \sin\varphi &= \frac{2k+q}{\sqrt{(2k+q)^2 + (k-q)^2}} = \frac{2k+q}{\sqrt{5k^2 + 2q^2 + 2kq}}, \\ \cos\varphi &= \frac{k-q}{\sqrt{5k^2 + 2q^2 + 2kq}}. \end{aligned} \right.$$

D'après (13) et (14), on a

$$\alpha = \frac{q}{2}(\sin\varphi + \cos\varphi)^2, \qquad \beta = \frac{q}{2}(\cos^2\varphi - \sin^2\varphi),$$

$$a = \frac{q}{2}(\sin\varphi + \cos\varphi),$$

et, d'après (15),

$$(16)\qquad \alpha = \frac{9qk^2}{2(5k^2+2q^2+2kq)},$$

$$(17)\qquad \beta = -\frac{3qk(k+2q)}{2(5k^2+2q^2+2kq)},$$

$$(18)\qquad a = \frac{3kq}{2\sqrt{5k^2+2q^2+2kq}}.$$

L'équation de la parabole tangente aux quatre droites

$$y=0,\qquad y=x,\qquad y=2x+k,\qquad y=-x+q$$

est donc

$$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=(x\cos\varphi+y\sin\varphi-a)^2,$$

ou

$$(19)\qquad \left[x-\frac{9qk^2}{2(5k^2+2q^2+2kq)}\right]^2 + \left[y+\frac{3qk(k+2q)}{2(5k^2+2q^2+2kq)}\right]^2 = \frac{1}{4(5k^2+2q^2+2kq)}[2(k-q)x+2(2k+q)y-3kq]^2.$$

Autre particularité curieuse. — Le procédé qui vient le plus naturellement à l'esprit pour exprimer que (1) est tangent à (2) consiste à former l'équation aux abscisses des points d'intersection de (1) et (2), et d'écrire que les deux valeurs de x sont égales.

Au lieu de trouver la relation (4), linéaire en α, β et a, on trouve une relation du second degré en α, β et a. Il faut qu'il y ait un *facteur parasite !*

Note de la Rédaction. — Il semble, au premier abord, que l'article précédent aurait pu faire l'objet d'une question analogue à celles qui prennent place dans l'*Intermédiaire des Mathématiciens*. Mais l'énoncé en eût été d'une longueur excessive. A titre

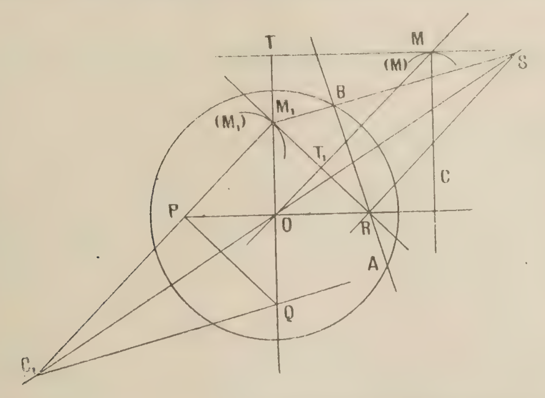
exceptionnel, nous avons donc accueilli la demande de M. Barisien, qui sollicite la résolution de l'équation (6) ou (7). Nous recevrons avec reconnaissance les observations de nos lecteurs à ce sujet; elles pourront faire l'objet d'articles figurant à la rubrique « Correspondance ».

[O¹2e]

CONSTRUCTION DU RAYON DE COURBURE DE LA POLAIRE RÉCIPROQUE D'UNE COURBE PAR RAPPORT A UN CERCLE;

PAR M. F. BALITRAND.

Considérons une courbe (M) et sa polaire réciproque (M_1) par rapport à un cercle de centre O. M et M_1 étant deux points correspondants et C et C_1 les



centres de courbure en ces points, nous nous proposons, connaissant C, de donner une détermination géométrique de C_1.

Nous prendrons pour axes deux diamètres rectangulaires du cercle O et nous ferons usage de coordonnées tangentielles; c'est-à-dire que (M) sera définie comme l'enveloppe de la droite

$$ux + vy - 1 = 0;$$

u et v étant fonctions d'un paramètre.

Les coordonnées x, y du point de contact M de la droite avec son enveloppe seront données par les deux équations

$$ux + vy - 1 = 0,$$
$$x\,du + y\,dv = 0;$$

d'où l'on tire ([1])

$$x = \frac{dv}{u\,dv - v\,du}, \qquad y = \frac{-du}{u\,dv - v\,du};$$

et par différentiation

$$dx = \frac{v(dv\,d^2u - du\,d^2v)}{(u\,dv - v\,du)^2}, \qquad dy = \frac{-u(dv\,d^2u - du\,d^2v)}{(u\,dv - v\,du)^2}.$$

L'élément d'arc de (M) a pour expression

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} = \frac{(dv\,d^2u - du\,d^2v)(u^2 + v^2)^{\frac{1}{2}}}{(u\,dv - v\,du)^2}.$$

L'angle de contingence ε se calcule aisément et l'on

([1]) On peut remarquer que ces formules fournissent une interprétation géométrique simple du rapport des différentielles du et dv. On a, en effet,

$$\frac{du}{dv} = -\frac{y}{x} = -\tan\theta,$$

θ désignant l'angle du rayon vecteur OM. A ce point de vue il y a une parfaite réciprocité entre x, y; u et v; car on a

$$\frac{du}{dv} = -\frac{y}{x}, \qquad \frac{dy}{dx} = -\frac{u}{v}.$$

trouve

$$\varepsilon = \frac{u\,dv - v\,du}{u^2 + v^2};$$

d'où pour le rayon de courbure ρ la valeur suivante :

$$\rho = \frac{(dv\,d^2u - du\,d^2v)(u^2 + v^2)^{\frac{3}{2}}}{(u\,dv - v\,du)^2}.$$

D'autre part, les coordonnées x_1, y_1 du pôle M_1 de la tangente en M à (M), par rapport au cercle directeur, sont

$$x_1 = a^2 u, \qquad y_1 = a^2 v;$$

a désignant le rayon du cercle directeur. Il en résulte pour le rayon de courbure de (M_1) en M_1 la formule

$$\rho_1 = a^2 \frac{(du^2 + dv^2)^{\frac{3}{2}}}{du\,d^2v - dv\,d^2u}.$$

Appelons V l'angle sous lequel la courbe (M) est coupée par le rayon vecteur OM [ou bien la courbe (M_1) par le rayon vecteur OM_1]; on trouve sans difficulté

$$\sin^2 V = \frac{(u\,dv - v\,du)^2}{(u^2 + v^2)(du^2 + dv^2)};$$

d'où

$$\rho\rho_1 \sin^3 V = a^2.$$

Telle est la formule cherchée ([1]). Elle conduit à plusieurs constructions géométriques de C_1 connaissant C.

Soient MT la tangente en M à (M) et M_1T_1 la tan-

([1]) Cette Note nous a été inspirée par un article de M. Chemin sur le même sujet (*Nouvelles Annales*, 1867, p. 49). La formule

$$\rho\rho_1 \sin^3 V = a^2$$

est de M. Chemin qui l'établit par une méthode différente et n'en déduit pas de construction géométrique pour C_1.

gente à (M_1) en M_1. Les droites OM et OM_1 sont respectivement perpendiculaires sur M_1T_1 et MT.

1° *Par le centre* O *du cercle directeur on élève à* OM_1 *une perpendiculaire qui coupe en* P *la normale à* (M_1) *en* M_1; *la perpendiculaire élevée en* P *à cette normale rencontre* OM_1 *en* Q; *la perpendiculaire abaissée de* Q *sur la polaire* AB *de* C, *par rapport au cercle directeur, passe en* C_1.

En effet les deux triangles OMC, C_1M_1Q sont semblables comme ayant leurs côtés parallèles. Donc

$$MC \times M_1C_1 = OM \times M_1Q.$$

Mais

$$M_1Q = \frac{OM_1}{\sin^2 V}.$$

T et T_1 étant les pieds des perpendiculaires abaissées de O sur les tangentes en M et M_1, on a aussi

$$OM_1 = \frac{OT_1}{\sin V} = \frac{a^2}{OM \sin V};$$

d'où

$$M_1O = \frac{a^2}{OM \sin^3 V};$$

par suite

$$MC \times M_1C_1 = \frac{a^2}{\sin^3 V}$$

et M_1C_1 est bien égal à ρ_1.

Par une transformation convenable, on peut déduire de ce qui précède la nouvelle construction suivante :

2° *Soit* R *le point où la polaire de* C *rencontre* M_1T_1; *élevons en ce point à* M_1T_1 *une perpendiculaire qui coupe en* S *la perpendiculaire abaissée de* M_1 *sur la polaire de* C; SO *passe en* C_1.

Le point R est le pôle de MC et le point M_1 est le

pôle de MT; donc OM_1 et OR sont rectangulaires et par suite OR est le prolongement de OP.

On voit facilement que les deux triangles C_1PQ, M_1RS sont homothétiques par rapport au point O; d'où il résulte que SO passe bien en C_1.

CORRESPONDANCE.

M. **F. Balitrand**. — *Au sujet des questions* **511, 512, 513**. — Ces questions, dont on s'est occupé récemment, se trouvent résolues depuis longtemps dans une de ces savantes et curieuses Notes que Terquem insérait fréquemment à la suite des articles publiés dans les *Nouvelles Annales*.

A propos de la démonstration d'un théorème de Statique par Catalan (*N. A.*, 1848, p. 294) Terquem signale que ce théorème est déjà connu et il indique que Möbius a traité des questions analogues dans un Mémoire sur la composition des rotations infiniment petites (*Crelle*, 1838, p. 189) et a donné notamment les propositions **511, 512, 513**.

M. **G. Fontené**. — *Sur la question* **2214**. — A la fin de la solution qu'il a donnée de cette question (1915, p. 577), M. Ono observe avec raison que l'identité I reste légitime pour le cas où m est entier, avec $p \gtreqless m$. Elle se réduit d'ailleurs dans cette hypothèse à l'identité

$$(1+x)^p - C^1_{p-m}x(1+x)^{p-1} + \ldots$$
$$+ (-1)^{p-m}C^{p-m}_{p-m}x^{p-m}(1+x)^m = (1+x)^m,$$

ou

$$(1+x)^{p-m} - C_{p-m}^{1} x (1+x)^{p-m-1} + \ldots + (-1)^{p-m} C_{p-m}^{p-m} x^{p-m} = 1,$$

ou

$$(\overline{1+x} - x)^{p-m} = 1.$$

Mais l'énoncé demandait quel résultat on obtient en supposant que m, d'abord quelconque, tend vers le nombre entier μ, avec $p \gtreqless \mu$. Le résultat est mentionné dans un Mémoire inséré dans ce journal (1914, p. 300), l'identité qui forme l'objet de la question ayant été fournie par la comparaison des résultats de deux méthodes différentes appliquées à un même problème.

M. **R. Goormaghtigh.** — *Sur le problème de Pappus généralisé.* — Ce problème dont MM. Joffroy et Barisien ont donné des solutions analytiques (*N. A.*, 1916, p. 168, 273) avait déjà été résolu par des considérations géométriques très simples par M. R. Marchay dans le numéro du 15 octobre 1914 du *Journal de Vuibert*.

Supposons le problème résolu et conservons les notations de M. Joffroy (p. 168). Sur une droite $ss' = l$ construisons des triangles $sO's'$, $sO''s'$ respectivement égaux à SOS' et $S_1OS'_1$; le quadrilatère $O'sO''s'$ est indescriptible. D'autre part, si la bissectrice de l'angle O' coupe ss' en T et le cercle $O'sO''s'$ en Q, les triangles $QO's$ et QsT sont semblables et l'on a

$$QO' . QT = \overline{Qs}^2.$$

Le problème revient donc à construire deux segments QO' et QT dont on connaît le produit $\overline{Qs}^2$ et la différence OP.

M. **E.-N. Barisien.** — *Sur le lieu des points équidistants de deux circonférences de cercle.* — En

remarquant que les distances d'un point à un cercle de rayon R sont δ et $\delta + 2R$, on voit que :

Le lieu des points équidistants de deux cercles se compose de deux hyperboles ayant toutes deux pour foyers les centres des cercles et pour grandeur de l'axe focal, pour l'une la différence des rayons des cercles, pour l'autre la somme de ces rayons.

Ce lieu est classique et presque évident par la Géométrie. Cependant, il y a lieu de remarquer qu'en général on ne cite comme résultat qu'une seule hyperbole, celle dont l'axe focal a pour longueur la différence des rayons.

Remarque. — Les cercles peuvent devenir soit des points, soit des droites. On a ainsi :

1° *Pour deux points*, le lieu est une ligne droite;

2° *Pour deux droites*, le lieu se compose de deux lignes droites, qui sont les bissectrices des droites données;

3° *Pour un point et une droite*, le lieu est une parabole;

4° *Pour un point et un cercle*, le lieu est une hyperbole;

5° *Pour une droite et un cercle*, le lieu se compose de deux paraboles.

M. **E.-N. Barisien.** — *Sur une description géométrique de la parabole.* — Si l'on considère dans une parabole le cercle décrit sur la corde focale principale comme diamètre, un *point quelconque de la parabole est à égale distance de ce cercle et de la corde focale principale. Ce point est aussi à égale distance de ce même cercle et de la droite symé-*

trique de la corde focale principale par rapport à la distance.

On pourra donc définir la parabole comme *lieu géométrique des points équidistants d'un cercle et d'une droite passant par son centre* (ou d'une droite située à la distance du centre du cercle égale à son diamètre). D'ailleurs, le *lieu des points qui sont équidistants d'une droite et d'un cercle se compose, en général, de* DEUX PARABOLES, parce qu'il y a deux distances d'nn point à un cercle.

M. **E.-N. Barisien**. — *Au sujet du p. g. c. d. et du p. p. m. c. de plusieurs nombres.* — Dans tous les traités d'Arithmétique on formule les règles suivantes pour la formation du p. g. c. d. et du p. p. m. c. de plusieurs nombres :

1° *Pour former le plus grand commun diviseur de plusieurs nombres, on les décompose en leurs facteurs premiers; on choisit chacun des facteurs premiers communs à tous les nombres, et on l'affecte de son plus petit exposant; le produit des nombres ainsi obtenu est le p. g. c. d. cherché;*

2° *Pour former le plus petit multiple commun à plusieurs nombres, on les décompose en leurs facteurs premiers; on prend une fois chacun des facteurs communs ou non communs et on l'affecte de son plus grand exposant. Le produit des nombres ainsi obtenu est le p. p. m. c. cherché.*

Ainsi, pour les trois nombres

$$2^3 \times 3^4 \times 5 \times 7, \qquad 2^2 \times 3^5 \times 5^2 \times 11, \qquad 2^4 \times 3^2 \times 5^3 \times 13,$$

$$\text{p. g. c. d.} = 2^2 \times 3^2 \times 5,$$

$$\text{p. p. m. c.} = 2^4 \times 3^5 \times 5^3 \times 7 \times 11 \times 13.$$

Si l'on admet que $a^0 = 1$, on pourra donner des règles bien plus simples ainsi formulées :

1° *Pour former le p. g. c. d. de plusieurs nombres, on les décompose en facteurs premiers, et l'on fait le produit de chacun de ces facteurs affectés du plus petit exposant (zéro compris)*;

2° *Pour former le p. p. m. c. de plusieurs nombres, on les décompose en facteurs premiers, et l'on fait le produit de chacun de ces facteurs affectés du plus grand exposant.*

Ainsi,

$$\text{p. g. c. d.} = 2^2 \times 3^2 \times 5^1 \times 7^0 \times 11^0 \times 13^0 = 2^2 \times 3^2 \times 5,$$
$$\text{p. p. m. c.} = 2^4 \times 3^5 \times 5^3 \times 7^1 \times 11^1 \times 13^1.$$

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES.

546.

(1860, p. 404.)

Étant donnée une conique A, *trouver les transformations qui la changent en une conique* B, *de telle sorte que les normales à la conique* A *restent par la transformation normales à la conique* B. *Même question pour les surfaces.*

LAGUERRE.

SOLUTION

PAR UN ABONNÉ.

Les coniques A et B étant quelconques, les transformations dont il s'agit sont homographiques. A un point M de la première correspond un point m de la seconde et au couple de droites, formé par la tangente et la normale en M, qui sont rectangulaires et par suite conjuguées par rapport aux droites

isotropes issues de M, correspond le couple formé par la tangente et la normale en m, également conjuguées par rapport aux droites isotropes issues de m.

La transformation doit donc conserver les points cycliques et par suite un cercle doit se transformer en un autre cercle. On sait qu'il n'y a que l'inversion, la similitude et la symétrie qui jouissent de cette propriété. L'inversion ne répond pas à la question et il ne reste par suite que la similitude et la symétrie.

La question pour les surfaces se résout de même.

1479.

(1883, p. 480.)

g étant une racine primitive de p^ν, la fonction

$$x + x^{g^2} + x^{g^4} + \ldots + x^{g^{p^{\nu-1}(p-1)-2}},$$

où tous les exposants de g sont des nombres pairs, est divisible par

$$\frac{x^{p^\nu} - 1}{x^{p^{\nu-1}} - 1};$$

p est supposé un nombre premier autre que 2, et ν plus grand que 1. PELLET.

SOLUTION

Par L'AUTEUR.

g étant un entier positif racine primitive de p^ν, le reste de la division du polynome

$$x + x^{g^2} + x^{g^4} + \ldots + x^{g^{p^{\nu-1}(p-1)-2}}$$

par $x^{p^\nu} - 1$ est

$$(1) \qquad x + x^{a_1} + \ldots + x^{a_{N-1}},$$

a_i étant le reste de la division de g^{2i} par p^ν; N est égal au nombre des résidus quadratiques, module p^ν, $\dfrac{p^{\nu-1}(p-1)}{2}$.

Il s'agit de démontrer que le polynome (1) est divisible par

$$(2) \qquad \frac{x^{p^\nu} - 1}{x^{p^{\nu-1}} - 1} = 1 + x^{p^{\nu-1}} + x^{2p^{\nu-1}} + \ldots + x^{(p-1)p^{\nu-1}}.$$

Si un nombre est résidu quadratique mod p, il est aussi résidu quadratique mod p^ν. Donc, à un des nombres a_i inférieur à $p^{\nu-1}$, on peut faire correspondre dans la suite des exposants du polynome (1) les nombres

$$a_i+p^{\nu-1},\quad a_i+2p^{\nu-1},\quad \ldots,\quad a_i+(p-1)p^{\nu-1}.$$

La somme des p termes correspondants est égale au produit de x^{a_i} par le polynome (2).

Le nombre des exposants a_i étant égal à $\frac{p^{\nu-2}(p-1)}{2}$, on épuise ainsi tous les termes du polynome (1).

ν doit être au moins égal à 2, et $p > 2$.

1505 [1].

Note

Par M. J. Lemaire.

La seconde partie de cette question, qui revient à chercher l'enveloppe des axes des paraboles inscrites à un triangle, peut être traitée géométriquement comme il suit :

Soient ABC le triangle donné, M un point du cercle circonscrit, $M\alpha$ la corde perpendiculaire à BC; la droite MP de l'énoncé est la perpendiculaire menée de M à $A\alpha$: appelons-la Δ; elle est parallèle à la droite de Simpson D relative au point M' diamétralement opposé à M, laquelle passe au milieu de la droite HM' qui joint M' à l'orthocentre H du triangle.

Menons par M' la parallèle Δ' à Δ : quand M décrit le cercle O, D enveloppe l'hypocycloïde de Steiner (S) du triangle, Δ' enveloppe une hypocycloïde homothétique, le centre d'homothétie étant H et le rapport 2; Δ enveloppe la symétrique de celle-ci par rapport à O, c'est-à-dire l'hypocycloïde homothétique de la première dans le rapport -2, le centre d'homothétie étant le point qui partage HO dans ce rapport, ou le centre de gravité.

Cette enveloppe est, comme on le voit, l'hypocycloïde de Steiner, c'est-à-dire l'enveloppe des droites de Simpson, du triangle formé par les parallèles aux côtés de ABC menées par les sommets opposés.

---

[1] *Voir* 1915, p. 469; 1916, p. 42; le lecteur est prié de faire la figure. Rappelons que, page 42, il faut *lire* **1505** *au lieu* de **1545**.

On peut l'obtenir aussi de la manière suivante : traçons la corde AD, du cercle circonscrit à ABC, parallèle à BC, et soit K le point de l'arc AD situé au tiers de cet arc à partir de A ; menons la corde KL perpendiculaire à AD, et la tangente en K au cercle circonscrit qui coupe Δ en N et AD en Q ; les angles Q et $\widehat{ALK}$, ayant même mesure, sont égaux, de sorte que AL est perpendiculaire sur NQ, et que les angles N et $\widehat{LA\alpha}$ sont égaux ; il en résulte que ces angles doivent avoir même mesure d'arc, et comme les arcs $L\alpha$ et KM sont égaux, on en conclut que l'arc KM_1 est double de l'arc KM, en appelant M_1 le second point commun à Δ et au cercle circonscrit au triangle ; puisque ces arcs sont de sens contraires, la droite Δ enveloppe une hypocycloïde à trois rebroussements tritangente à ce cercle, K étant l'un des points de contact.

1585.

(1888, p. 448.)

Soit $u_1 + u_2 + u_3 + \ldots$ *une série divergente dont les termes tendent, en décroissant, vers zéro. Démontrer que si la série*

$$\varepsilon_1 u_1 + \varepsilon_2 u_2 + \varepsilon_3 u_3 + \ldots$$

est convergente, la moyenne arithmétique des n premiers nombres ε *ne peut avoir d'autre limite que zéro, lorsque n croît à l'infini.*

E. Cesàro.

Solution
Par un Abonné.

Supposons que l'on ait

$$\lim \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 + \ldots + \varepsilon_n}{n} = \lambda,$$

λ étant une quantité finie, quand n croît indéfiniment. Je dis que la série

$$\varepsilon_1 u_1 + \varepsilon_2 u_2 + \varepsilon_3 u_3 + \ldots$$

est divergente.

On sait en effet (E. Cesàro, *Corso di Analisi algebrica*,

p. 103) que dans les conditions de l'énoncé 1585, on a

$$\lim \frac{\varepsilon_1 u_1 + \varepsilon_2 u_2 + \ldots + \varepsilon_n u_n}{u_1 + u_2 + \ldots + u_n} = \lim \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_n}{n} = \lambda.$$

Par suite la série

$$\varepsilon_1 u_1 + \varepsilon_2 u_2 + \varepsilon_3 u_3 + \ldots$$

est bien divergente.

1588.

(1888, p. 448.)

Si, d'un point quelconque du plan d'une ellipse quelconque, on abaisse les quatre normales à l'ellipse; si N_1 N_2, N_3, N_4 *sont les distances du point aux pieds des normales, et* ρ_1, ρ_2, ρ_3, ρ_4 *les rayons de courbure correspondant aux pieds des normales, on a la relation*

$$\frac{\rho_1}{\rho_1 - N_1} + \frac{\rho_2}{\rho_2 - N_2} + \frac{\rho_3}{\rho_3 - N_3} + \frac{\rho_4}{\rho_4 - N_4} = 2.$$

E. Barisien.

Solution

Par un Abonné.

La question n° 1588 mériterait une solution particulière, mais puisque aucune n'en a encore été donnée, nous indiquerons qu'elle n'est qu'un cas particulier du théorème général suivant dû à M. G. Humbert (*Nouvelles Annales*, 1887, p. 543) :

Soit C *une courbe algébrique; par un point* M *de son plan menons-lui des normales; soient* P *le pied de l'une d'elles,* R *le centre de courbure en* P. *On a, quand* M *varie,*

$$\sum \frac{MP}{MR} = \text{const.},$$

la somme étant étendue à toutes les normales issues de M.

Autre solution par l'Auteur.

1677 (1).

Note
Par M. M.-F. Egan.

Cette question admet une solution très simple, et qui ajoute quelques éléments à l'énoncé. Soit une conique (C) tangente aux droites a, b, c, d. Désignons par A, B, C, α, β, γ les points bc, ca, ab, ad, bd, cd, et par P, Q, R les points de contact de a, b, c avec la conique. Soient M le second point de rencontre de AP avec (C), m la tangente à (C) en M, et μ le point d'intersection de m et d. Je dis d'abord que μ *reste fixe lorsque la conique* (C) *varie*.

En effet, le rapport anharmonique $(\alpha\beta\mu\gamma)$ des points où la tangente d rencontre les quatre tangentes a, b, m, c est égal au rapport anharmonique de leurs points de contact P, Q, M, R. Or, P et M sont harmoniquement conjugués par rapport à Q et R, comme on l'aperçoit en considérant l'involution déterminée sur la conique (C) par les cordes menées par A. μ est donc conjugué harmonique de α par rapport à β et γ.

Ensuite, les droites AP et μM se correspondent univoquement, puisque l'une ou l'autre suffit à déterminer la conique (C). Le point d'intersection M de ces droites décrit donc une conique (S) passant par A et μ. En considérant les coniques-limites Bβ, Cγ, on voit que (S) passe aussi par B et C.

(S) est tangente à d en μ. En effet, si le point M vient se poser sur d, on trouve sans peine que $(\alpha\beta M\gamma)$ est harmonique, donc M se confond avec μ.

En projetant à l'infini l'une ou l'autre des droites a, c, d, on obtient des théorèmes sur les paraboles inscrites à un triangle.

1704 *bis*.

(1895, p. 39*; 1916, pp. 184, 322.)

Démontrer que, si un triangle se déplace en restant inscrit et circonscrit à deux coniques fixes, le centre du cercle circonscrit à ce triangle décrit une conique. Exa-

---

(1) Voir *Nouvelles Annales*, 1915, p. 567.

miner en particulier les cas où cette conique est un cercle ou un système de deux droites. M. Weill.

Nouvelle Solution
Par M. G. Fontené.

1. En résolvant la question 1832, je montrerai avec le moins de calcul possible que le lieu cherché est une conique. J'imiterai ici, en améliorant le point de départ, le calcul qui se trouve dans le *Cours de Géométrie analytique* de MM. Imbert et Weill pour la recherche du lieu du point de concours des hauteurs du triangle de l'énoncé.

La conique à laquelle les triangles sont inscrits étant supposée être une ellipse, représentée par les formules

$$x = \frac{a(1-t^2)}{1+t^2}, \qquad y = \frac{2bt}{1+t^2},$$

une équation de la forme

$$\lambda\varphi(b) + \psi(t) = 0,$$

où φ et ψ sont deux polynomes du troisième degré, définit un triangle mobile ABC inscrit à l'ellipse et circonscrit à une conique fixe, puisque, si l'on se donne une racine t', λ est déterminé et l'on obtient pour t deux autres valeurs t'', t'''. Les sept paramètres apparents de cette relation se réduiront à quatre, comme il convient, eu égard à la possibilité de donner à trois de ces paramètres des valeurs fixées d'avance, au moyen de la substitution

$$\lambda = \frac{m\sigma + n}{p\sigma + q}.$$

En particulier, et c'est en cela que consiste la simplification apportée ici à la méthode des auteurs, on peut prendre

$$[(A\lambda + B)t - (C\lambda + D)](t^2+1) + \lambda t - 1 = 0;$$

on aura alors $t = \pm i$ pour $\lambda = \mp i$, de sorte que, pour $\lambda = \mp i$, l'un des trois sommets du triangle ABC sera rejeté à l'infini, le cercle circonscrit (O) aura son centre à l'infini; les formules qui donneront les coordonnées du point O auront donc (λ^2+1) comme dénominateur.

Les coordonnées du point O ont pour expressions, en fonction de t dans trois sommets,

$$x = \frac{c^2}{a} \frac{(1 - t't'')(1 - t't''')(1 - t''t''')}{(1 + t'^2)(1 + t''^2)(1 + t'''^2)},$$

$$y = \frac{-c^2}{b} \frac{\Sigma t' \Sigma t't'' - t't''t'''}{(1 + t'^2)\ldots};$$

ces formules m'ont été indiquées par M. Weill.

L'équation en t étant

$$(A\lambda + B)t^3 - (C\lambda + D)t^2 + [(A\lambda + B) + \lambda]t - [(C\lambda + D) + 1] = 0,$$

un calcul facile donne

$$x = -\frac{c^2}{a} \frac{A\lambda^2 + (B + C)\lambda + D + 1}{\lambda^2 + 1},$$

$$y = -\frac{c^2}{b} \frac{C\lambda^2 + (D - A)\lambda - B}{\lambda^2 + 1};$$

le lieu du point O est une conique.

2. J'arrive à la seconde partie de la question. Une conique étant représentée paramétriquement, si l'on en cherche un point double, on doit avoir, en désignant par α et β deux valeurs de λ,

$$x = \frac{a\alpha^2 + b\alpha + c}{A\alpha^2 + B\alpha + C} = \frac{a(\alpha + \beta) + b}{A(\alpha + \beta) + B} = \frac{b\alpha\beta + c(\alpha + \beta)}{B\alpha\beta + C(\alpha + \beta)},$$

$$y = \frac{a'\alpha^2 + \ldots}{A\alpha^2 + \ldots} = \frac{a'(\alpha + \beta) + b'}{A(\alpha + \beta) + B} = \frac{b'\alpha\beta + \ldots}{B\alpha\beta + \ldots},$$

d'où l'on déduit

$$\begin{vmatrix} \alpha\beta & -(\alpha + \beta) & 1 \\ C & B & A \\ c & b & a \end{vmatrix} = 0, \qquad \begin{vmatrix} \alpha\beta & -(\alpha + \beta) & 1 \\ C & B & A \\ c' & b' & a' \end{vmatrix} = 0.$$

Si l'on suppose

$$\begin{vmatrix} A & B & C \\ a & b & c \\ a' & b' & c' \end{vmatrix} \neq 0,$$

ces équations donnent

$$\frac{\alpha\beta}{C} = \frac{\alpha+\beta}{-B} = \frac{1}{A},$$

de sorte que α et β sont les racines de l'équation

$$A\lambda^2 + B\lambda + C = 0;$$

mais alors il faudrait que les trois équations

$$\begin{aligned} a\lambda^2 + b\lambda + c &= 0,\\ a'\lambda^2 + b'\lambda + c' &= 0,\\ A\lambda^2 + B\lambda + C &= 0 \end{aligned}$$

eussent une racine commune, ce qui est impossible d'après l'hypothèse faite.

Il faut donc supposer

$$\begin{vmatrix} A & B & C \\ a & b & c \\ a' & b' & c' \end{vmatrix} = 0,$$

et les deux relations entre $\alpha\beta$ et $\alpha+\beta$ sont identiques; tous les points de la conique sont des points doubles. A la vérité, on pourrait supposer que deux des trois polynomes $a\lambda^2+\ldots$, $a'\lambda^2+\ldots$, $A\lambda^2+\ldots$ ont une racine commune, qui serait alors également racine du troisième; nous écarterons cette hypothèse inutile, pour retenir seulement la condition ci-dessus; dans ces conditions, *la conique est une droite double*, les deux valeurs α et β du périmètre λ qui donnent un même point étant liées par la relation écrite plus haut; on peut écrire

$$x = \frac{a\theta + b}{A\theta + B}, \qquad y = \frac{a'\theta + b'}{A\theta + B},$$

θ représentant $\alpha + \beta$.

Pour la question posée on peut dire : *Si un couple de triangles* ABC *fournit deux cercles circonscrits concentriques*, *tous les triangles* ABC *peuvent être groupés par couples jouissant de la même propriété; le lieu du point* O *est alors une droite* (*fig.* 1). La condition pour qu'il en soit ainsi est

$$(B+C)^2 + (D-A)(D-A+1) = 0;$$

on a alors

$$\frac{\alpha+\beta}{1-\alpha\beta} = \frac{D-A}{-(B+C)} = \frac{B+C}{D-A+1},$$

et le lieu du point O est la droite

$$\frac{\dfrac{ax}{c^2}+A}{\dfrac{by}{c^2}+C} = \frac{B+C}{D-A}.$$

3. Le lieu du point O sera un cercle si, pour $\lambda = \pm i$, on a $\frac{y}{x} = \pm \varepsilon i$. En supposant $a^2 \neq b^2$, ce qui se comprend, on trouve les conditions

$$B+C=0, \qquad \frac{D-A+1}{D-A} = \frac{\varepsilon a}{b};$$

mais il faudrait les interpréter.

QUESTIONS.

2296. Étant donnés une ellipse E de foyer F, F′ et un point M de son plan qui se projette en P et Q sur les axes; si T_1, T_2 sont les points de contact des tangentes à E issues de M, et N_1, N_2, N_3, N_4 les pieds des normales à E issues du même point M, les *onze* points suivants

$$M,\ P,\ Q,\ F,\ F',\ T_1,\ T_2,\ N_1,\ N_2,\ N_3,\ N_4$$

sont situés sur une même strophoïde oblique dont le point double est en M. Cette strophoïde reste la même pour une autre ellipse de foyer F et F′.

Les foyers imaginaires de E sont aussi situés sur cette strophoïde. E.-N. Barisien.

2297. Soient T_1, T_2, T_3 les trois points de contact des tangentes menées d'un point M à une cardioïde dont le point de rebroussement est O. Le lieu du point M tel que les droites

OT_1, OT_2, OT_3 et la tangente de rebroussement forment un faisceau harmonique est une quartique.

E.-N. Barisien.

2298. Étant donnés une parabole et un de ses points M, on mène en ce point la normale qui coupe à nouveau la courbe en M_1 et son axe en N. Démontrer géométriquement :

1° Que le point M et le pôle P de MM_1, par rapport à la parabole, sont équidistants de la directrice;

2° Que la perpendiculaire élevée en N à MM_1 et la perpendiculaire abaissée de M sur l'axe se coupent sur le diamètre du point P.

F. Balitrand.

2299. Soient ABC un triangle, O le centre du cercle circonscrit, α le pied de la hauteur issue du sommet A sur BC. On considère la parabole ayant pour foyer α et pour directrice OA et les deux autres paraboles analogues. Démontrer que ces trois paraboles ont trois tangentes communes (en dehors de la droite de l'infini) et trouver ces tangentes.

F. Balitrand.

2300. Un cercle mobile roule extérieurement sur un cercle fixe; chaque point du cercle mobile décrit une épicycloïde. Trouver le lieu des centres de courbure de ces épicycloïdes correspondant à une position déterminée du cercle mobile.

F. Balitrand.

2301. Soit un faisceau tangentiel de quadriques, dont une sphère S de centre P, et soit F l'une des quatre coniques planes du système. Les trois autres coniques du système sont les sections, par les plans polaires respectifs de P, de trois quadriques ayant F pour focale commune. Chacune de ces trois quadriques passe par les deux points limites des sphères coaxales avec S ayant le plan de F pour plan radical.

M.-F. Egan.

2302. Le lieu de la projection du centre de courbure en un point d'une cissoïde sur la parallèle menée par ce point à l'asymptote est une cubique d'Agnesi.

R. Goormaghtigh.

2303. On considère deux hypocycloïdes à trois rebroussements égales ayant une tangente de rebroussement A_1A_2 commune et telles que l'une ait un rebroussement en A_1 et le sommet opposé en A_2, l'autre un rebroussement en A_2 et un sommet en A_1. Si d'un point P de A_1A_2 on mène à ces hypocycloïdes les tangentes PM_1 et PM_2 situées d'un même côté de A_1A_2, la corde des contacts M_1M_2 enveloppe une hypocycloïde à quatre rebroussements. R. GOORMAGHTIGH.

2304. Dans un triangle ABC, les côtés AB et AC déterminent, sur la médiatrice relative au côté BC, un segment $\alpha\beta$. Les perpendiculaires, abaissées des sommets B et C sur la droite qui joint l'orthocentre du triangle au milieu du côté BC, déterminent sur la même médiatrice un segment $\alpha'\beta'$. Démontrer que ces deux segments sont égaux. F. BALITRAND.

2305. On donne une conique S et un point C dans son plan. Il existe deux cercles de centre C tels que la conique S et l'un de ces cercles admettent des triangles circonscrits à S et inscrits au cercle. Les triangles de chacune des deux familles sont conjugués à une conique Σ; démontrer que les centres des deux coniques Σ sont symétriques l'un de l'autre par rapport au centre de la conique S. G. FONTENÉ.

PUBLICATIONS RÉCENTES.

CAVALCANTI (ALMEIDA). — ESSAI D'UN COURS PHILOSOPHIQUE DE CALCUL ARITHMÉTIQUE D'APRÈS AUGUSTE COMTE; traduction française par *B. de Aranjo Gonçalves;* 1 vol. in-8, XXV-827 pages. Librairie Em. Blanchard, 10, rue de la Sorbonne; Paris, 1916. Prix : 14^{fr}.

BAHIER (EUG.). — RECHERCHE MÉTHODIQUE ET PROPRIÉTÉS DES TRIANGLES RECTANGLES EN NOMBRES ENTIERS; 1 vol. gr. in-8, VII-266 pages. Librairie A. Hermann et fils, 6, rue de la Sorbonne; Paris, 1916. Prix : 8^{fr},50.

[L¹16b]

SUR DEUX THÉORÈMES DE MIQUEL ET DE CLIFFORD;

PAR M. HENRI LEBESGUE.

1. On connaît le théorème de Miquel (¹) :

Étant données cinq droites dans un plan, il existe cinq paraboles dont chacune est tangente à quatre de ces droites; les foyers de ces cinq paraboles sont sur une même circonférence.

Clifford (²) a donné une très ingénieuse démonstration de ce théorème, qui est reproduite par Salmon (³). Mais, bien que Salmon donne tout le raisonnement de Clifford, il n'énonce pas explicitement le résultat plus général de cet auteur, qui constitue l'un des plus simples et des plus élégants théorèmes récurrents qu'on puisse citer.

Le résultat de Clifford peut s'énoncer brièvement comme il suit :

A chaque système de $2p$ droites d'un plan on peut attacher un point, à chaque système de $2k+1$ droites on peut attacher une circonférence de façon à satisfaire aux trois conditions ci-dessous :

1° Le point attaché à un système de $2p$ droites est commun aux $2p$ circonférences attachées aux

(¹) *Journal de Liouville*, t. III, IX et X.

(²) *Messenger of Mathematics*, t. V.

(³) *Courbes planes*, Chap. IV, n° 146.

$2p$ systèmes de $2p-1$ droites qu'on peut déduire du système initial par la suppression d'une droite;

2° *La circonférence attachée à un système de $2k+1$ droites passe par les $2k+1$ points attachés aux $2k+1$ systèmes de $2k$ droites qu'on peut déduire du système initial par la suppression d'une droite;*

3° *Le point attaché à un système de deux droites est leur point de rencontre.*

De là il résulte que la circonférence attachée à un triangle est la circonférence circonscrite; puis que les quatre circonférences circonscrites aux quatre triangles que l'on peut former avec quatre droites concourent en un point, qui est le point attaché au système des quatre droites.

Pour cinq droites, nous avons le théorème de Miquel; la circonférence de Miquel ainsi obtenue est celle qui est attachée au pentagone; puis nous voyons que les six circonférences de Miquel attachées aux six pentagones que l'on peut former avec six droites ont un point commun; etc.

C'est ce théorème de Clifford que je me propose de démontrer ici par les méthodes mêmes de Clifford et de Miquel.

2. Nous ne considérerons que des courbes de classe n admettant la droite de l'infini pour tangente d'ordre $n-1$. A une telle courbe on ne peut mener qu'une tangente parallèle à une direction donnée; donc une seule tangente parallèle à chaque direction isotrope. Elle n'a donc qu'un seul foyer. Pour la commodité, qualifions cette courbe de *monofocale*. Un point est une courbe monofocale de classe 1; une parabole est une courbe monofocale de classe 2.

L'équation tangentielle d'une courbe monofocale est de la forme

$$\varphi_n(u, v) + \varphi_{n-1}(u, v) = 0;$$

elle dépend d'une façon homogène de

$$(n+1) + (n) = 2n + 1 \text{ paramètres.}$$

Tangentiellement à $2p$ droites il y a donc une (et en général une seule) courbe monofocale de classe p; son foyer sera le point attaché au système des $2p$ droites. Tangentiellement à $2k+1$ droites données, il y a un système de courbes monofocales de classe $k+1$ qui dépendent linéairement d'un paramètre. A chaque courbe de ce faisceau tangentiel on peut faire correspondre une tangente isotrope issue du point cyclique I et une tangente issue du point cyclique J; d'ailleurs, tangentiellement à une droite isotrope, il n'existe qu'une courbe de la famille, puisque cette courbe est alors déterminée par $2k+2$ tangentes. Donc les tangentes issues de I et de J aux courbes de la famille se correspondent homographiquement. Le lieu du point de rencontre de ces tangentes, c'est-à-dire le lieu du foyer des courbes du faisceau, est donc une circonférence. C'est la circonférence qui sera attachée au système des $2k+1$ droites.

Il reste à vérifier que les trois conditions indiquées sont bien vérifiées. Cela est évident pour la troisième.

Pour la première aussi puisque la courbe monofocale de classe p tangente à $2p$ droites, étant tangente à $2p-1$ quelconques de ces droites, fait partie de la famille des courbes monofocales de classe p tangentes à ces $2p-1$ droites.

Pour s'assurer que la seconde condition est remplie, il suffit de remarquer que, parmi les courbes monofocales de classe $k+1$ tangentes à $2k+1$ droites, se

trouvent les courbes constituées par le point à l'infini de l'une des droites et la courbe monofocale de classe k tangente aux $2k$ autres droites.

Les théorèmes de Miquel et de Clifford sont donc démontrés. Cette démonstration est celle de Clifford.

3. La méthode beaucoup plus élémentaire qui conduisit Miquel à son théorème permet aussi d'obtenir la généralisation de Clifford.

Démontrons, avec Miquel, le lemme suivant : Soient quatre circonférences C_1, C_2, C_3, C_4; désignons par a_{ij}, A_{ij} les points communs aux deux circonférences C_i et C_j. *Si les points* a_{12}, a_{23}, a_{34}, a_{41} *sont sur une même circonférence, il en est de même des points* A_{12}, A_{23}, A_{34}, A_{41}.

$abcd$ étant un quadrilatère, concave ou convexe, et la notation $\widehat{abc}$ désignant l'un quelconque des angles de premier côté ba et de second côté bc, la relation

$$\widehat{abc} + \widehat{cda} = k\pi,$$

dans laquelle k est un nombre entier positif, nul ou négatif, est la condition nécessaire et suffisante pour que les quatre points a, b, c, d appartiennent à une même circonférence ou soient en ligne droite.

Dans les conditions de l'énoncé, on a donc :

$$\widehat{A_{12}a_{12}a_{23}} + \widehat{a_{23}A_{23}A_{12}} = k\pi,$$
$$\widehat{a_{41}a_{12}A_{12}} + \widehat{A_{12}A_{41}a_{41}} = k\pi,$$
$$\widehat{A_{34}a_{34}a_{41}} + \widehat{a_{41}A_{41}A_{34}} = k\pi,$$
$$\widehat{a_{23}a_{34}A_{34}} + \widehat{A_{34}A_{23}a_{23}} = k\pi$$

et

$$\widehat{a_{41}a_{12}a_{23}} + \widehat{a_{23}a_{34}a_{41}} = k\pi;$$

la lettre k ne désignant pas toujours le même entier. Mais on peut prendre en particulier :

$$\widehat{a_{41}a_{12}a_{23}} = \widehat{a_{41}a_{12}A_{12}} + \widehat{A_{12}a_{12}a_{23}},$$
$$\widehat{a_{23}a_{34}a_{41}} = \widehat{a_{23}a_{34}A_{34}} + \widehat{A_{34}a_{34}a_{41}}$$

et poser

$$\widehat{A_{12}A_{41}A_{34}} = \widehat{A_{12}A_{41}a_{41}} + \widehat{a_{41}A_{41}A_{34}},$$
$$\widehat{A_{34}A_{23}A_{12}} = \widehat{A_{34}A_{23}a_{23}} + \widehat{a_{23}A_{23}A_{12}}.$$

Donc, en soustrayant la cinquième relation de la somme des quatre premières, on a

$$\widehat{A_{12}A_{41}A_{34}} + \widehat{A_{34}A_{23}A_{12}} = k\pi;$$

ce qui démontre le lemme. Mais, d'après la démonstration même, le lemme n'est exact que si l'on admet que la circonférence $A_1A_2A_3A_4$ puisse se réduire à une droite.

Remarquons d'ailleurs qu'une figure formée de droites et de circonférences est transformée en une figure formée uniquement de circonférences par une inversion convenable; les droites de la première figure étant transformées en circonférences passant par le pôle d'inversion. Donc on pourra, dans l'application du lemme de Miquel, considérer les droites comme des circonférences particulières qui ont en commun un point fictif que nous désignerons par le symbole ∞.

4. Nous allons maintenant démontrer de proche en proche le théorème de Clifford.

Les droites du système seront désignées par les chiffres 1, 2, 3, ... Par les symboles 12, 123, 1234, ..., on désignera respectivement les éléments (points ou circonférences) que le théorème de Clifford permet

d'attacher respectivement aux systèmes 1, 2; 1, 2, 3; 1, 2, 3, 4; ...,

12 est donc le point de rencontre de 1 et de 2; 123 est la circonférence circonscrite au triangle de côtés 1, 2, 3. Quant aux éléments 1234, 12345, ..., leur existence même est ce que nous allons démontrer. Dans ces notations l'ordre des chiffres n'importe pas.

Cas de quatre droites. — Appliquons le lemme aux quatre circonférences ou droites 123, 3, 4, 124.

Les deux premières ont en commun 13 et 23. La deuxième et la troisième ont en commun 34 et ∞. La troisième et la quatrième 14 et 24. La quatrième et la première 12 et un autre point A. Or les points 13, ∞, 14, 12 appartiennent à la droite 1; donc les points 23, 34, 24 et A sont sur une circonférence; donc 234 passe par A.

De même 23, ∞, 24, 12 appartiennent à 2; donc 13, 34, 14 et A appartiennent à une circonférence; donc 134 passe par A.

Les quatre circonférences 123, 134, 124, 234 passent donc par le point A, qu'on désignera par 1234.

Cas de cinq droites. Théorème de Miquel. — Appliquons le lemme aux quatre circonférences 123, 134, 145, 152 prises dans cet ordre. On trouve les couples de points communs 1234, 13; 1345, 14; 1245, 15; 1235, 12. Et comme 13, 14, 15, 12 sont sur la droite 1, il en résulte que 1234, 1345, 1245, 1235 sont sur une circonférence.

Faisant maintenant jouer à la droite 2 le rôle spécial que jouait avant la droite 1, on voit que 2134, 2135, 2145, 2345 sont aussi sur une circonférence.

Ces deux circonférences sont donc confondues, c'est la circonférence de Miquel 12345.

Cas de six droites. — Appliquons le lemme aux circonférences 56123, 563, 564, 56124 prises dans cet ordre. Elles nous donnent comme couples de points communs 5613, 5623; 5634, 56; 5614, 5624; 5612 et un autre point A. Or les points 5613, 56, 5614, 5612 appartiennent à la circonférence 561, donc les points 5623, 5634, 5624, A sont sur une circonférence; c'est-à-dire que la circonférence 56234 passe aussi par A.

De même les points 5623, 56, 5624, 5612 sont sur la circonférence 562; donc 5613, 5634, 5614, A sont sur une circonférence, c'est-à-dire que la circonférence 56134 passe aussi par A.

En faisant jouer à deux droites quelconques le rôle spécial des deux droites 56, on voit finalement que les six cercles de Miquel passent par le point A qu'on désignera par la notation 123456.

Cas de sept droites. — Appliquons le lemme aux quatre circonférences 67123, 67134, 67145, 67152 prises dans cet ordre. Nous avons les couples de points 671234, 6713; 671345, 6714; 671245, 6715; 671235, 6712. Et comme les quatre points nommés en second lieu dans chacun des couples sont sur la circonférence 671, les autres sont sur une circonférence. En permutant le rôle des droites 1 et 2, on verrait que le point 672345 est aussi sur cette dernière circonférence. Enfin, en faisant jouer le rôle spécial des droites 6 et 7 à deux autres droites, on voit finalement que tous les sept points tels que 123456 sont sur une circonférence 1234567.

Il est inutile de continuer. Si l'on remarque que pour passer du cas de quatre droites à celui de six droites il nous a suffi de répéter la démonstration relative au premier de ces cas en ajoutant à chaque symbole de point

ou de circonférence les deux chiffres 5, 6 et aussi que, pour passer du cas de cinq droites à celui de sept, nous avons ajouté simplement 6 et 7 à tous les symboles employés, on a la clef des généralisations successives.

5. Quelle que soit la méthode de démonstration que l'on adopte, il faudrait la compléter par l'examen des cas particuliers dont je vais dire rapidement quelques mots en m'appuyant surtout sur le mode de raisonnement de Clifford. Pour éviter des difficultés accessoires je ne considérerai que les systèmes de droites réelles et non parallèles deux à deux.

a. Si une courbe monofocale est tangente à la droite de l'infini en l'un des points cycliques, son foyer est confondu avec l'autre point cyclique.

Lorsqu'une courbe satisfaisant à la définition posée pour les courbes monofocales est tangente à la droite de l'infini en chacun des points cycliques, elle n'a en réalité pas de foyer; nous conviendrons de dire qu'elle a comme foyer le point fictif ∞ commun à toutes les droites du plan, voici pourquoi :

Considérons un système de $2k+1$ droites et, comme au n° 2 le faisceau tangentiel des courbes monofocales de classe k tangentes à ces droites. Le lieu des foyers de ces courbes a été obtenu par l'intersection des rayons homologues de deux faisceaux homographiques de sommets I et J. Pour que ce lieu soit une droite et non une circonférence, il faut et il suffit qu'à la droite de l'infini, considérée comme rayon du faisceau de sommet I, corresponde la droite de l'infini comme rayon du faisceau de sommet J.

C'est-à-dire qu'il faut que les $2k+1$ droites soient tangentes à une courbe monofocale de classe k tan-

gente à la droite de l'infini en chacun des points cycliques.

b. La partie d'une courbe monofocale qui est à distance finie, n'ayant qu'une seule tangente parallèle à une direction donnée, est indécomposable. Si donc une courbe monofocale est décomposable, elle se compose d'une courbe monofocale de classe inférieure et de points à l'infini.

Considérons un système de $2k$ droites; au n° 2 nous lui avons attaché une courbe monofocale de classe k. Cette courbe peut ne pas être déterminée d'une façon unique; s'il y en a deux, ces deux courbes ont en commun $(k-1)^2$ tangentes à l'infini et $2k$ à distance finie, donc k^2+1 tangentes communes. Ces deux courbes ont donc une partie commune, qui est une courbe monofocale et par suite elles ont le même foyer.

Ainsi le point attaché à un système de droites en nombre pair n'est jamais indéterminé; ce peut être le point fictif ∞.

c. A un système de $2k+1$ droites, nous avons attaché un faisceau tangentiel de courbes monofocales de classe k; ce faisceau peut être indéterminé, c'est-à-dire que les courbes de classe k tangentes aux $2k+1$ droites peuvent dépendre de plus d'un paramètre. On peut disposer de deux de ces paramètres pour rendre la courbe tangente à deux droites D_1 et D_2 parallèles entre elles, mais non parallèles aux droites du système donné. La courbe monofocale ainsi déterminée se décompose alors en le point à l'infini de D_1 et D_2 et une courbe monofocale de classe $k-1$ tangente aux droites du système, laquelle peut être elle aussi décomposable. Soit C la courbe monofocale de classe la plus petite possible qui soit tangente aux droites du système;

cette courbe C fait nécessairement partie de toutes les courbes de classe k tangentes aux droites du système. Donc toutes ces courbes ont le même foyer.

Donc la circonférence attachée à un système de droites en nombre impair $2k+1$ n'est jamais indéterminée; elle se réduit à une circonférence de rayon nul lorsque les $2k+1$ systèmes de $2k$ droites qu'on en peut déduire ont tous le même point associé.

Dans ce qui précède je n'ai pas invoqué explicitement les restrictions faites sur les systèmes de droites; mais on a compris que le fait que les droites étaient réelles permettait de ne pas s'occuper des courbes monofocales tangentes à la droite de l'infini en un seul des points cycliques ou des faisceaux de courbes monofocales ayant une tangente isotrope fixe et qu'en supposant les droites du système non parallèles deux à deux on écartait le cas où seule la partie à l'infini des courbes monofocales que l'on considérait aurait été déterminée par les tangentes données.

6. Il est facile de démontrer analytiquement le théorème de Clifford. Voici un procédé rapide :

Les droites du système seront représentées par des équations de la forme

$$u_i x + v_i y + 1 = 0,$$

dans lesquelles les deux coordonnées x et y sont isotropes, c'est-à-dire sont données en fonction de deux coordonnées rectangulaires X et Y par les formules

$$x = X + iY, \qquad y = X - iY.$$

Par la notation

$$|\, ux,\ u,\ vy,\ v\,|_{1,2,3,4},$$

par exemple, je désignerai le tableau carré ou détermi-

nant dont les lignes se déduisent de celle écrite, en donnant à u et v successivement les indices indiqués 1, 2, 3, 4.

Par la notation

$$\| ux, u, vy, v, 1 \|_{1,2,3,4},$$

par exemple, je désignerai le tableau rectangulaire ou matrice qu'on obtient par le procédé qui vient d'être indiqué.

Je dirai, comme à l'habitude, qu'une matrice est nulle si les déterminants d'ordre le plus élevé possible qu'on en peut déduire sont tous nuls. Voici un lemme qu'il est commode d'énoncer :

Une matrice à n lignes et $n+1$ colonnes est nulle si deux des déterminants à n^2 éléments qu'on en peut déduire sont nuls; à moins que la matrice formée par les colonnes communes à ces deux déterminants ne soit nulle.

Soit par exemple la matrice

$$\| \alpha, \beta, a, b, c \|_{1,2,3,4};$$

supposons que les deux déterminants

$$| \alpha, a, b, c |_{1,2,3,4}; \quad | \beta, a, b, c |_{1,2,3,4}$$

soient nuls et démontrons qu'il en est de même du déterminant

$$| \alpha, \beta, a, b |_{1,2,3,4}.$$

Par hypothèse il existe deux relations

$$\lambda \alpha + \mu a + \nu b + \varpi c = 0,$$
$$\lambda' \beta + \mu' a + \nu' b + \varpi' c = 0,$$

valables pour les valeurs 1, 2, 3, 4 des indices. Si ϖ est nul, le théorème est démontré puisque alors la

matrice

$$\| \alpha, a, b \|_{1,2,3,4}$$

est nulle. De même, si ϖ' est nul.

Si $\varpi\varpi'$ n'est pas nul, on peut éliminer c entre les relations précédentes. Cela donne :

$$\lambda\varpi'\alpha - \lambda'\varpi\beta + (\mu\varpi' - \mu'\varpi)a + (\nu\varpi' - \nu'\varpi)b = 0,$$

relation dont tous les coefficients ne sont nuls que si λ et λ' sont nuls ; or cela n'a lieu que si la matrice

$$\| a, b, c \|_{1,2,3,4}$$

est nulle.

7. *Cas de deux droites.* — En éliminant successivement y, puis x, entre les deux équations des droites 1, 2, notations du n° 4, on voit que les coordonnées de leur point de rencontre 12 satisfont aux relations

$$| ux + 1, v |_{1,2} = 0; \qquad | vy + 1, u |_{1,2} = 0.$$

On peut encore écrire ces relations sous la forme

$$| u(ux + 1), uv |_{1,2} = 0; \qquad | v(vy + 1), uv |_{1,2} = 0.$$

Cas de trois droites. — Considérons l'équation

$$| u(ux + 1), v(vy + 1), uv |_{1,2,3} = 0;$$

étant de premier degré en x et en y elle représente une circonférence. D'après le lemme, cette circonférence passe par les points 12 ; 23 ; 31, sauf peut-être si tous les produits uv sont nuls, c'est-à-dire si toutes les droites sont isotropes, cas que nous laissons de côté. On a donc là l'équation de la circonférence 123.

Cas de quatre droites. — L'équation de la cir-

conférence 123 est la condition que doivent vérifier x et y pour qu'il existe des nombres λ, μ, ν, non tous nuls, vérifiant les trois relations de la forme

$$\lambda u(ux+1)+\mu v(vy+1)+\nu uv=0,$$

obtenues en affectant les lettres u et v des indices 1, 2, 3.

Considérons les quatre relations obtenues à l'aide des indices 1, 2, 3, 4. Entre ces relations, éliminons d'abord λ, μy, μ, ν, puis λx, λ, μ, ν; nous obtenons les équations

$$|u(ux+1),\ v^2,\ v,\ uv|_{1,2,3,4}=0;$$
$$|v(vy+1),\ u^2,\ u,\ uv|_{1,2,3,4}=0$$

qui déterminent x et y de façon que les quatre relations aient une solution commune en λ, μ, ν. Le point x, y est donc commun aux quatre circonférences 123, 234, 341, 412. C'est le point 1234. Nous écrirons les équations qui déterminent ce point sous la forme

$$|u^2(ux+1),\ u^2v,\ uv^2,\ uv|_{1,2,3,4}=0;$$
$$|v^2(vy+1),\ u^2v,\ uv^2,\ uv|_{1,2,3,4}=0.$$

Cas de cinq droites. — L'équation

$$|u^2(ux+1),\ v^2(vy+1),\ u^2v,\ uv^2,\ uv|_{1,2,3,4,5}=0$$

représente évidemment une circonférence qui, d'après le lemme, contient les cinq points tels que 1234, sauf peut-être dans le cas où la matrice

$$\|u^2v,\ uv^2,\ uv\|_{1,2,3,4,5}=0$$

serait nulle. Or, dans ce cas, en supposant toujours les droites non isotropes, elles devaient toutes passer par un même point P. Tous les points tels que 1234 seraient

en P et l'existence d'une circonférence contenant tous ces points 1234 ne se pose alors pas.

Cas de six droites. — On voit de suite que le point attaché au système est donné par

$$|\, u^3(ux+1),\ u^3v,\ u^2v^2,\ uv^3,\ u^2v,\ uv^2\,|_{1,2,3,4,5,6} = 0;$$
$$|\, v^3(vy+1),\ u^3v,\ u^2v^2,\ uv^3,\ u^2v,\ uv^2\,|_{1,2,3,4,5,6} = 0.$$

Cas de sept droites. — La circonférence attachée à sept droites est

$$|\, u^3(ux+1),\ v^3(vy+1),\ u^3v,\ u^2v^2,\ uv^3,\ u^2v, uv^2\,|_{1,2,3,4,5,6,7} = 0.$$

Il ne saurait y avoir doute que pour le cas où la matrice

$$\|\, u^3v,\ u^2v^2,\ uv^3,\ u^2v,\ uv^2\,|_{1,2,3,4,5,6,7}$$

serait nulle.

En écartant le cas des droites isotropes, ce qui permet de diviser par uv, on reconnaît dans la relation obtenue la condition pour que les sept droites soient tangentes à une même parabole, auquel cas, d'après le n° 5, la circonférence attachée aux sept droites se réduit au foyer de cette parabole. Mais il est inutile de recourir au raisonnement de Clifford. En divisant la matrice par le produit des v elle s'écrit

$$\|\, u^3,\ u^2,\ u^2v,\ uv^2,\ uv\,\|_{1,2,3,4,5,6} = 0,$$

et, en se reportant à l'équation qui donne l'x du point attaché à un système de quatre droites, on voit qu'elle exprime que tous les points tels que 1234 ont la même abscisse. Mais on voit aussi qu'elle exprime que tous ces points ont la même ordonnée, donc finalement elle exprime que tous les points 1234 sont confondus. Et il est facile de conclure.

8. Cette démonstration analytique montre, plus nettement encore peut-être que les précédentes, qu'il s'agit seulement d'une des interprétations géométriques dont est susceptible un théorème, que je n'énonce pas, sur les correspondances homographiques ayant un couple homologue commun. Dans le numéro précédent les deux variables sont x, y et le couple commun est ∞, ∞.

Si l'on reprend les raisonnements des nos 3 et 4 en y remplaçant les relations d'angle par des égalités de rapports anharmoniques, on aura une démonstration géométrique générale de ce théorème sur les correspondances homographiques. Le lecteur pourra chercher d'autres interprétations géométriques de ce théorème en géométrie plane et en géométrie dans l'espace.

Il s'agit ici de correspondances homographiques entre deux variables, donc, si l'on veut, entre deux droites. Y a-t-il une proposition analogue pour les correspondances homographiques entre plans?

J'appelle aussi l'attention sur une proposition de Miquel, généralisation à l'espace du lemme du n° 3, qu'il y aurait intérêt à étudier. On la trouvera dans les Mémoires cités.

[K'2e]

SUR DEUX THÉORÈMES DE M. FONTENÉ RELATIFS A L'ORTHOPOLE ;

PAR M. V. THÉBAULT.

Dans les *Nouvelles Annales* (juin 1910, p. 274), nous avons donné un théorème élémentaire relatif à l'orthopôle d'un diamètre du cercle circonscrit à un

triangle qui nous a servi déjà à diverses reprises. Nous nous proposons de l'utiliser ici pour obtenir une démonstration particulièrement simple de deux théorèmes de M. Fontené parus dans les *Nouvelles Annales* en 1906.

1. M. Fontené a proposé sous le n° 2021 la question suivante :

Soit un triangle ABC *et soient* M, N, P *les milieux des côtés. Considérons les projections* D, E, F *d'un même point sur ces côtés. Si a, b, c sont respectivement les intersections des droites* NP *et* EF, PM *et* FD MN *et* DE, *le triangle abc est conjugué par rapport au cercle* DEF (¹).

L'auteur en a donné (1906, p. 56) une solution analytique qui fut suivie (p. 59) d'une démonstration géométrique de M. R. Bricard. Celui-ci énonce ainsi le théorème de M. Fontené :

Soient ABC *un triangle*, DEF *le triangle podaire d'un point* S *par rapport à* ABC, a, b, c, *les intersections respectives des droites* NP *et* EF, PM *et* FD, MN *et* DE. *Les trois droites* Da, Eb, Fc *concourent en un point qui appartient au cercle* DEF *et au cercle* MNP.

Sous cette forme, la question 2021 apparaît nettement comme la généralisation de la construction d'Hamilton relative au point φ de Feuerbach qui, comme l'on sait, est l'orthopôle, par rapport au triangle ABC,

---

(¹) Si D, E, F sont les contacts du cercle inscrit, le centre d'homologie des triangles *abc* et DEF est le point φ de Feuerbach, l'axe d'homologie des triangles *abc* et ABC est la tangente en φ.
(W. R. Hamilton.)

de la ligne des centres IO des cercles inscrit et circonscrit au triangle.

Or nous avons donné dans cette Revue (mars 1914, p. 108) deux démonstrations géométriques de la construction d'Hamilton dont la première nous paraît être assez élégante. Le raisonnement peut être généralisé en utilisant notre théorème de 1910 (p. 274) et le théorème que donna M. Lemoyne en 1904 :

Les distances de l'orthopôle φ *d'un diamètre* OS *du cercle circonscrit à un triangle aux pieds des hauteurs égalent respectivement les distances des sommets du triangle au diamètre* OS.

Autrement dit : *Les projections orthogonales des sommets du triangle sur le diamètre* OS *sont respectivement symétriques de l'orthopôle* φ *du diamètre par rapport aux droites joignant les milieux des côtés du triangle.*

Si l'on projette un point quelconque S *du diamètre* OS *du cercle circonscrit à un triangle* ABC *sur les côtés de ce triangle en* D, E, F, *le cercle* DEF *passe par l'orthopôle* φ *de* OS *par rapport à* ABC.

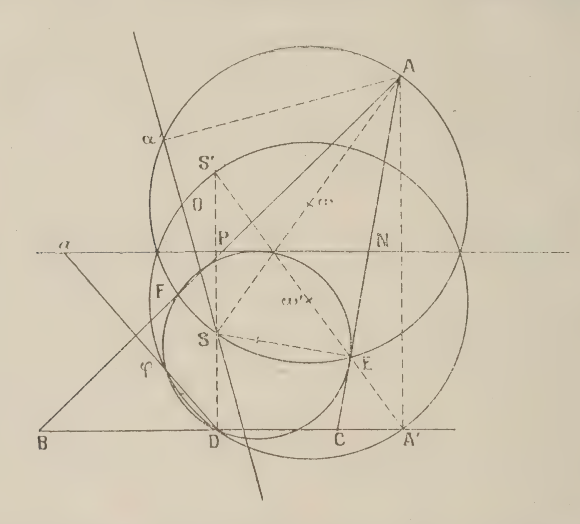
Le cercle DEF passe par φ. Le cercle ω circonscrit au quadrilatère AESF a pour centre le milieu de AS et son symétrique ω' par rapport à NP passe aussi par φ en vertu de notre théorème précédent. Ce cercle passe aussi en A', pied de la hauteur AA', et par le point D, car, S' étant symétrique de S par rapport à NP, ω' a pour diamètre SA'. (*Voir* la figure.)

Les droites EF, NP et φD sont donc les axes radicaux des cercles ω, DEF et ω' pris deux à deux et se coupent par suite en un même point a [1].

---

[1] M. R. Goormaghtigh, utilisant notre raisonnement pour la

Le triangle *abc* est donc conjugué par rapport au cercle DEF. Ce théorème de M. Fontené permet



alors d'énoncer un grand nombre de propriétés du triangle *abc*.

En voici quelques-unes parmi les plus intéressantes :

Le triangle abc a pour orthocentre le centre du cercle podaire de S.

Si P_a, P_b, P_c *sont les puissances des sommets a, b, c par rapport au cercle podaire de* S *et* ρ *le rayon de ce cercle, on a les relations :*

1°

$$\frac{1}{P_a}+\frac{1}{P_b}+\frac{1}{P_c}=-\frac{1}{\rho^2};$$

2°

$$\frac{\overline{ab}^2}{P_a P_b}+\frac{\overline{bc}^2}{P_b P_c}+\frac{\overline{ac}^2}{P_c P_a}=-\frac{2}{\rho^2};$$

---

démonstration de la constrution d'Hamilton (*Journal de Vuibert*. 38e année, p. 37), donna cette généralisation (même Revue, p. 69).

3°

$$\frac{(\text{aire } abc)^2}{P_a P_b P_c} = -\frac{1}{4\rho^2}.$$

2. Lorsque S est le centre du cercle inscrit I au triangle ABC, on obtient la propriété de W.-R. Hamilton énoncée au précédent paragraphe.

La démonstration en est simple, la première partie étant le cas particulier du théorème de M. Fontené.

D, E, F sont alors les contacts du cercle inscrit avec les côtés de ABC et φ le point de Feuerbach de ce triangle.

Les points a, b, C, situés sur la polaire de C par rapport au cercle inscrit, sont en ligne droite; il en est de même des points a, B, c et A, b, c, qui forment respectivement deux alignements.

Par suite, si γ' est le point où la tangente en φ au cercle I rencontre AB, la droite φF, par exemple, passant en c, γ' pôle de φF appartient à la polaire ab de C par rapport au cercle I. De même les points d'intersection de bcA avec BC, de acB avec CA, appartiennent à la tangente en φ au cercle I.

Donc *le triangle qui a pour sommets les points d'Hamilton a, b, c d'un triangle* ABC *est circonscrit à* ABC *et homologique à ce triangle; l'axe d'homologie est la tangente au cercle inscrit au point φ de Feuerbach.*

3. Le cercle podaire ω d'un point S du plan d'un triangle ABC est également celui de l'inverse triangulaire S′ de ce point par rapport au triangle. Les points d'intersection φ_1 et φ_2 de ce cercle ω avec le cercle d'Euler du triangle, sont respectivement les orthopôles des diamètres OS et OS′.

M. Fontené a établi que *la condition nécessaire et suffisante pour que le cercle* ω *soit tangent au cercle d'Euler de* ABC *est que* O, S, S' *soient en ligne droite.*

Notre théorème de 1910 le prouve immédiatement.

Pour que le cercle ω soit tangent au cercle d'Euler, il faut et il suffit que les orthopôles φ_1 et φ_2 de OS et OS' soient confondus; par suite il faut et il suffit que leurs symétriques par rapport à la droite NP des milieux de AB et BC par exemple, soient confondus, c'est-à-dire que OS et OS' soient confondus.

4. Un point R quelconque étant donné, il est intéressant de déterminer les points du diamètre OR tels que leurs cercles podaires soient tangents au cercle d'Euler du triangle ABC.

Soient M, M', N, N' les intersections avec OR des bissectrices intérieures et extérieures des angles A et B, ω et ω' les milieux de MM' et NN', S et S' les deux points cherchés, inverses triangulaires l'un de l'autre par rapport au triangle ABC.

On a visiblement

$$\overline{MM'}^2 = 4\omega S \times \omega S',$$
$$\overline{NN'}^2 = 4\omega' S \times \omega' S';$$

d'où, φ étant milieu de SS',

$$\overline{MM'}^2 = 4(\overline{\omega\varphi}^2 - \overline{S\varphi}^2),$$
$$\overline{NN'}^2 = 4(\overline{\omega'\varphi}^2 - \overline{S\varphi}^2)$$

et

$$\text{const.} = \overline{MM'}^2 - \overline{NN'}^2 = 4(\overline{\omega\varphi}^2 - \overline{\omega'\varphi}^2).$$

Le milieu de SS' étant déterminé, S et S' le sont aussi. Il existe un seul point φ et par suite deux points S et S' qui peuvent être intervertis.

[B12a]

GÉNÉRALISATION DES QUANTITÉS IMAGINAIRES;

Par M. J.-B. POMEY.

On sait que les quantités imaginaires peuvent être considérées comme les résidus des fonctions entières par rapport au module $1 + x^2$.

Soit de même la fonction

$$x^3 - s_1 x^2 + s_2 x - s_3,$$

dont les racines sont ω_1, ω_2, ω_3, de sorte que l'on a

$$(x - \omega_1)(x - \omega_2)(x - \omega_3) \equiv x^3 - s_1 x^2 + s_2 x - s_3,$$

identiquement. J'appellerai *quantité imaginaire* toute fonction entière de l'indéterminée x, à la condition d'admettre en même temps l'équivalence de ladite fonction avec le reste de sa division par

$$(x - \omega_1)(x - \omega_2)(x - \omega_3).$$

De cette façon, les quantités à considérer seront des trinomes du second degré en x. La somme de

$$M_1 x^2 + N_1 x + P_1$$

et de

$$M_2 x^2 + N_2 x + P_2$$

sera évidemment

$$(M_1 + M_2) x^2 + (N_1 + N_2) x + P_1 + P_2.$$

Le produit de deux imaginaires se définira naturel-

lement par l'identité

$$Mx^2 + Nx + P \equiv (M_1x^2 + N_1x + P_1)(M_2x^2 + N_2x + P_2) \\ - \lambda(x - \omega_1)(x - \omega_2)(x - \omega_3),$$

identité au moyen de laquelle il est facile de déterminer les valeurs à donner à MN et P, sans parler de λ, qui ne nous intéresse pas.

On obtiendra ces valeurs de la façon la plus simple en faisant x égal successivement à ω_1, à ω_2 et à ω_3. Et l'on aura les égalités ci-après où l'on a mis f_{1,ω_1} pour $M_1\omega_1^2 + N_1\omega_1 + P$ et pris pour les quantités similaires des notations analogues,

$$(1) \quad \begin{cases} M\omega_1^2 + N\omega_1 + P = f_{1\omega_1} f_{2\omega_1}, \\ M\omega_2^2 + N\omega_2 + P = f_{1\omega_2} f_{2\omega_2}, \\ M\omega_3^2 + N\omega_3 + P = f_{1\omega_3} f_{2\omega_3}. \end{cases}$$

Soit

$$\Delta = \begin{vmatrix} \omega_1^2 & \omega_1 & 1 \\ \omega_2^2 & \omega_2 & 1 \\ \omega_3^2 & \omega_3 & 1 \end{vmatrix} = (\omega_1 - \omega_2)(\omega_1 - \omega_3)(\omega_2 - \omega_3).$$

On aura, par exemple,

$$M = \frac{1}{\Delta} \begin{vmatrix} f_{1\omega_1} & f_{2\omega_1} & \omega_1 & 1 \\ f_{1\omega_2} & f_{2\omega_2} & \omega_2 & 1 \\ f_{1\omega_3} & f_{2\omega_3} & \omega_3 & 1 \end{vmatrix}.$$

On remarquera que ce déterminant s'annule pour $\omega_1 = \omega_2$ ou ω_3 et pour $\omega_2 = \omega_3$; il doit donc être divisible par Δ et, par suite, M est une fonction entière de ω_1, ω_2, ω_3. D'ailleurs, si l'on échange ω_1 et ω_2, par exemple, ce déterminant change de signe, et il en est de même de Δ, tout en gardant même valeur absolue. C'est donc une fonction symétrique des racines ω_1, ω_2, ω_3. Par suite, M est une fonction entière symétrique de ω_1, ω_2, ω_3; donc elle s'exprimera d'une

façon rationnelle et entière en fonction de s_1, s_2, s_3. Ajoutons que si ces quantités sont des nombres entiers, il en sera de même de M, pourvu que $M_1 N_1 P_1$, $M_2 N_2 P_2$ soient aussi entiers.

Un raisonnement analogue s'applique à chacune des quantités N et P.

D'ailleurs, on peut vérifier par le calcul ce qui vient d'être dit : par exemple, de l'équation

$$\omega^3 = s_1\omega^2 - s_2\omega + s_3$$

on tire

$$\omega^4 = s_1\omega^3 - s_2\omega^2 + s_3\omega\,;$$

d'où

$$\omega^4 = (s_1^2 - s_2)\omega^2 + (s_3 - s_1 s_2)\omega + s_1 s_3,$$

ce qui montre que le déterminant

$$\begin{vmatrix} \omega_1^4 & \omega_1 & 1 \\ \omega_2^4 & \omega_2 & 1 \\ \omega_3^4 & \omega_3 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} (s_1^2 - s_2)\omega_1^2 + (s_3 - s_1 s_2)\omega_1 + s_1 s_3 & \omega_1 & 1 \\ \dots\dots\dots\dots & \dots & . \\ \dots\dots\dots\dots & \dots & . \end{vmatrix}.$$

est égal à $(s_1^2 - s_2)\Delta$.

On obtiendrait des résultats analogues pour les divers déterminants à considérer au cours du calcul du déterminant qui figure au numérateur de M.

Nous aurons donc, en multipliant les équations (1),

$$(2)\quad \begin{aligned}&(M\omega_1^2 + N\omega_1 + P)(M\omega_2^2 + N\omega_2 + P)(M\omega_3^2 + N\omega_3 + P)\\ &\qquad = f_{1\omega_1} f_{1\omega_2} f_{1\omega_3} \times f_{2\omega_1} f_{2\omega_2} f_{2\omega_3}.\end{aligned}$$

Si l'on appelle *module* d'une quantité imaginaire $f_{1\omega}$ la racine carrée (ou cubique si l'on veut) de $f_{1\omega_1} f_{1\omega_2} f_{1\omega_3}$, on pourra énoncer cette relation en disant que le module d'un produit est égal au produit des modules.

Il est facile d'exprimer le produit

$$(M\omega_1^2 + N\omega_1 + P)(M\omega_2^2 + N\omega_2 + P)(M\omega_3^2 + N\omega_3 + P),$$

en fonction de s_1, s_2, s_3. Je l'écrirai d'abord sous la forme

$$M^3(\omega_1-\alpha)(\omega_1-\beta)(\omega_2-\alpha)(\omega_2-\beta)(\omega_3-\alpha)(\omega_3-\beta),$$

en posant

$$\alpha+\beta=-\frac{N}{M}, \qquad \alpha\beta=\frac{P}{M},$$

ou sous la forme équivalente,

$$\begin{aligned}
&M^3(\alpha^3-s_1\alpha^2+s_2\alpha-s_3)(\beta^3-s_1\beta^2+s^2+s_2\beta-s_3)\\
&=M^3(\alpha^3\beta^3-s_1\beta^3\alpha^2+s_2\beta^3\alpha-s_3\beta^3\\
&\qquad -s_1\alpha^3\beta^2+s_1^2\alpha^2\beta^2-s_1s_2\alpha\beta^2+s_1s_3\beta^2\\
&\qquad +s_2\alpha^3\beta-s_1s_2\alpha^2\beta+s_2^2\alpha\beta-s_2s_3\beta\\
&\qquad\qquad -s_3\alpha^3+s_1s_3\alpha^2-s_2s_3\alpha+s_3^2)\\
&=M^3\{\alpha^3\beta^3-s_1\alpha^2\beta^2(\alpha+\beta)+s_2\alpha\beta[(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta]\\
&\qquad -s_3[(\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta)]+s_1^2\alpha^2\beta^2-s_1s_2\alpha\beta(\alpha+\beta)\\
&\qquad +s_1s_3[(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta]+s_2^2\alpha\beta-s_2s_3(\alpha+\beta)+s_3^2\}\\
&=M^3\left[\frac{P^3}{M^3}+s_1\frac{P^2}{M^2}\frac{N}{M}+s_2\frac{P}{M}\left(\frac{N^2}{M^2}-2\frac{P}{M}\right)\right.\\
&\qquad +s_3\left(\frac{N^3}{M^3}-3\frac{P}{M}\frac{N}{M}\right)+s_1^2\frac{P^2}{M^2}+s_1s_2\frac{P}{M}\frac{N}{M}\\
&\qquad \left.+s_1s_3\left(\frac{N^2}{M^2}-2\frac{P}{M}\right)+s_2^2\frac{P}{M}+s_2s_3\frac{N}{M}+s_3^2\right]\\
&=P^3+s_1P^2N+s_2P(N^2-2PM)+s_3(N^3-3PMN)\\
&\quad -s_1^2P^2M+s_1s_2PNM+s_1s_3(N^2-2PM)M\\
&\quad +s_2^2PM^2+s_2s_3NM^2+s_3^2M^3,
\end{aligned}$$

ou, en ordonnant,

$$\begin{aligned}
&s_3^2M^3+s_3N^3+P^3+s_2s_3M^2N+(s_2^2-2s_1s_3)M^2P\\
&\quad +s_1s_3N^2M+s_2N^2P+(s_1^2-2s_2)P^2M+s_1P^2N\\
&\quad +(s_1s_2-3s_3)MNP.
\end{aligned}$$

Appelons cette fonction de MNP, $\varphi(M, N, P)$. Supposons que s_1, s_2, s_3 soient des entiers. Il résulte de ce qui vient d'être exposé que si deux nombres entiers

sont de la forme

$$A_1 = \varphi(M_1 N_1 P_1),$$
$$A_2 = \varphi(M_2 N_2 P_2),$$

on aura

$$A_1 A_2 = \varphi(MNP),$$

M, N, P étant des entiers comme $M_1 N_1 P_1$ et $M_2 N_2 P_2$. En effet, dans l'égalité (2), on aura

$$\varphi(M_1 N_1 P_1) = f_1\omega_1 . f_1\omega_2 . f_1\omega_3,$$
$$\varphi(M_2 N_2 P_2) = f_2\omega_1 . f_2\omega_2 . f_2\omega_3,$$

et, par suite,

$$A_1 A_2 = \varphi(MNP).$$

Un cas particulier intéressant, c'est celui dans lequel ω_1, ω_2, ω_3 sont les racines cubiques de l'unité; on a alors $s_1 = s_2 = 0$, $s_3 = 1$ et la fonction φ devient

$$\varphi = M^3 + N^3 + P^3 - 3MNP = \begin{vmatrix} M & N & P \\ P & M & N \\ N & P & M \end{vmatrix}.$$

On peut remarquer que les trois facteurs dont le produit constitue $\varphi(M, N, P)$ dans le cas général sont de la forme

$$\lambda^2 M + \lambda N + P.$$

Chacun de ces facteurs linéaires égalé à zéro représente une tangente à la conique

$$N^2 - 4MP = 0.$$

Ce qui caractérise φ, c'est donc que cette forme soit décomposable en trois facteurs représentant des tangentes à cette conique, les trois valeurs de λ correspondantes étant racines d'une équation

$$x^3 - s_1 x^2 - s_2 x - s_3 = 0$$

à coefficients entiers.

[S2a]

SUR UNE NOUVELLE FIGURE D'ÉQUILIBRE D'UNE MASSE FLUIDE EN ROTATION;

Par M. B. GLOBA-MIKHAÏLENKO,
docteur ès sciences.

Dans ma Thèse de doctorat, imprimée dans le premier fascicule de l'année 1916 du *Journal de Mathématiques pures et appliquées*, j'ai démontré l'existence d'une infinité de figures d'équilibre d'une masse fluide en rotation, infiniment voisines d'un cylindre elliptique indéfini. Je me propose ici de résoudre le problème suivant :

Imaginons une masse fluide homogène formant une couche de densité 1, *limitée par deux cylindres elliptiques indéfinis et homothétiques. Les molécules de cette masse s'attirent suivant la loi de Newton et la masse, en entier, tourne autour de son axe avec une vitesse angulaire constante* ω. *La pression extérieure est la même sur les deux faces de la couche. Dans quelles conditions cette masse sera-t-elle en équilibre relatif?*

Pour qu'elle le soit, il faut et il suffit, comme nous le savons (¹), que les surfaces des cylindres limitant la masse fluide soient des surfaces de niveau.

Or, à l'intérieur de la couche fluide (partie creuse),

(¹) *Voir* Appell, *Traité de Mécanique*, t. III, Chap. XXXI.

le potentiel newtonien est constant; donc les seules forces qui y agissent sont les forces centrifuges et la fonction des forces y est

$$U = \frac{\omega^2}{2}(x^2 + y^2) + \text{const.}$$

Soit

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

l'équation du cylindre intérieur. Si ce cylindre est une surface de niveau, ses coefficients doivent vérifier la condition

$$\frac{\omega^2}{2} a^2 = \frac{\omega^2}{b_2} b^2, \qquad \text{d'où} \qquad a = b;$$

car U doit rester constant dans toute sa surface. Par conséquent, la couche cylindrique doit être de révolution.

Désignons son rayon extérieur par r_0, le rayon intérieur par kr_0, k étant le rapport des deux rayons. Alors pour $k = 0$ le cylindre est plein, et pour $k = 1$ la couche cylindrique devient infiniment mince.

Considérons un point à l'intérieur de la masse fluide. Soit r sa distance de l'axe. Alors le potentiel dans ce point sera [1]

$$V = -\pi r^2 + \pi k^2 r_0^2 \log r^2 + \text{const.}$$

et la fonction des forces

$$U = -\pi r^2 + \pi k^2 r_0^2 \log r^2 + \frac{\omega^2}{2} r^2 + \text{const.}$$

Pour avoir la fonction U sur la surface extérieure et sur la surface intérieure de la couche, il faut poser

---

(1) *Voir* Appell, *Traité de Mécanique*, t. III, p. 108.

dans cette formule

$$r = r_0 \qquad \text{et} \qquad r = kr_0.$$

En écrivant que la fonction des forces prend la même valeur sur ces deux surfaces, nous aurons la condition d'équilibre

$$-\pi r_0^2 + \pi k^2 r_0^2 \log r_0^2 + \frac{\omega^2 r_0^2}{2}$$
$$= -\pi k^2 r_0^2 + \pi k^2 r_0^2 \log k^2 r_0^2 + \frac{\omega^2 k^2 r_0^2}{2},$$

d'où

$$\frac{\omega^2}{2\pi} = \frac{1 - k^2 + k^2 \log k^2}{1 - k^2}.$$

On voit facilement que $\frac{\omega^2}{2\pi} = 1$ pour $k = 0$; elle diminue lorsque k croît et devient nulle pour $k = 1$. Par conséquent, nous voyons que la couche cylindrique devient cylindre circulaire plein pour $\omega^2 = 2\pi$. C'est la vitesse limite pour ce cylindre. Si la vitesse décroît, la masse fluide peut affecter soit la figure d'un cylindre plein, soit la figure d'une couche circulaire. Par conséquent, le cylindre circulaire limite est une figure de bifurcation.

Ainsi, en rattachant ce résultat aux résultats obtenus dans ma Thèse, nous voyons que, pour chaque vitesse angulaire, il existe au moins deux figures ellipsoïdales d'équilibre : cylindre circulaire et couche cylindrique. Mais si ω^2 ne dépasse pas π_1, il faut y ajouter la troisième : celle du cylindre elliptique.

CERTIFICATS DE MÉCANIQUE RATIONNELLE.

Montpellier.

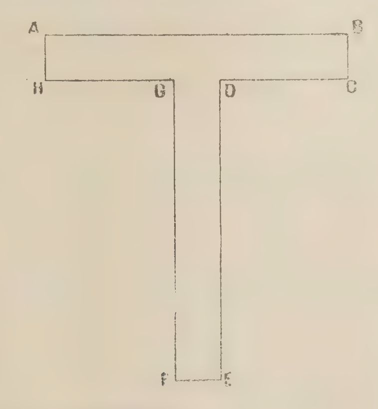
Épreuve écrite. — *Deux points pesants, de masses m et m', sont reliés par un fil élastique de masse négligeable. Lorsque ce fil n'est pas tendu, sa longueur naturelle est a; s'il est tendu, de manière à prendre la longueur $l(l > a)$, sa tension est égale à $\lambda^2(l - a)$, λ étant une constante donnée.*

On place le fil verticalement, et on le tend de manière à lui donner la longueur $2a$; puis, maintenant fixe le point le plus élevé, on imprime à l'autre une vitesse horizontale égale à $\omega\lambda\sqrt{\dfrac{m+m'}{mm'}}$, ω étant une constante donnée, et l'on abandonne le système à lui-même.

On demande d'étudier le mouvement que prend le système.

Nota. — *S'il arrive que, dans le cours du mouvement, le fil reprenne sa longueur naturelle, on ne poursuivra pas l'étude du mouvement.*

Épreuve pratique. — *Une plaque métallique a la forme*



d'un simple té ABCDEFGH.

On donne

$$AB = DE = 10^{cm},$$
$$BC = FE = 2^{cm}.$$

1° *Déterminer la position du centre de gravité.*

2° *Calculer le moment d'inertie de la pièce par rapport à un axe situé dans son plan, parallèle à* AB, *et passant par le centre de gravité.*

On supposera la densité de la pièce égale à l'unité.

(Juin 1911.)

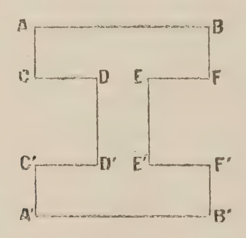
Épreuve écrite. — *Une sphère, homogène et pesante, peut tourner sans glisser autour d'un axe fixe, vertical, passant par son centre, et un point pesant est assujetti à se mouvoir sur la surface de la sphère. Les liaisons sont réalisées sans frottement; le rayon de la sphère, les masses de la sphère et du point sont égaux à l'unité.*

1° *Établir les équations qui font connaître le mouvement du système.*

2° *Calculer la réaction de la sphère sur le point.*

3° *Examiner le cas particulier où la vitesse relative initiale du point est tangente au parallèle de la sphère sur lequel se trouve le point (on ne s'occupera pas de la réaction).*

Épreuve pratique. — *Une plaque métallique homogène*



a la forme d'un double té; les dimensions sont les suivantes :

$$AB = 150^{cm},$$
$$CD = 50^{cm},$$
$$AA' = 200^{cm},$$
$$DD' = 100^{cm},$$

on fait osciller la plaque autour de l'arête AB *maintenue horizontale. Quelle sera la durée d'oscillation de faible amplitude?*

On prendra

$$g = 981^{\text{cm}}.$$ (Juin 1913.)

Épreuve écrite. — *Un cône de révolution peut tourner, sans glisser, autour de son axe qui est maintenu fixe dans une position verticale. La base du cône est au-dessus du sommet. Un point matériel pesant est assujetti à se mouvoir sans frottement sur la surface du cône.*

1° *Établir les équations qui font connaître le mouvement de ce système matériel.*

2° *Examiner le cas particulier où, à l'époque initiale, la vitesse relative du point mobile est tangente au parallèle du cône qui passe par la position du mobile.*

Peut-on, dans ce cas, choisir les données initiales de manière que le mobile décrive un parallèle du cône?

Épreuve pratique. — *Une manivelle* OA, *ayant* 1^{m} *de longueur, tourne dans un plan fixe, autour de son extrémité* O *qui est fixe, en faisant* 150 *tours à la minute. Une bielle* AB, *ayant* 4^{m} *de longueur, est articulée en* A *à la manivelle, tandis que son extrémité* B *glisse sur une droite fixe* D, *distante du point* O *de* 10^{cm} *et située dans le plan dans lequel se meut la manivelle.*

Calculer la vitesse du point B :

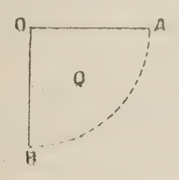
1° *Lorsque la manivelle est parallèle à* D;

2° *Lorsqu'elle est perpendiculaire à* D.

(Novembre 1913.)

Nancy.

1. *Évaluer l'intensité de la pression exercée par un*



fluide incompressible homogène pesant sur une paroi

plane Q *située dans un plan incliné d'un angle donné* α *sur l'horizon. La paroi* Q *est un quart de cercle* OAB *limité par deux rayons* OA *et* OB *dont le premier est horizontal; le quart de cercle est plus bas que* OA.

2. *Déterminer le plan de charge et évaluer sa distance au centre de masse de la paroi homogène* Q.

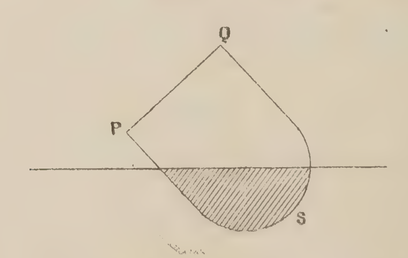
3. *Déterminer le point* O *de l'intersection* u *du plan de charge et du plan de la paroi* Q, *pour lequel* u *est axe principal d'inertie de* Q.

4. *Définir et déterminer le centre de pression de la paroi.*

5. *Si, dans le plan incliné donné, la distance de* OA *au plan de niveau du fluide est à notre disposition, comment faut-il choisir cette distance pour que le centre de pression soit aussi élevé que possible?* (Juin 1912.)

Soit (C) *un corps solide cylindrique pesant, homogène, de densité* 0,25, *ayant pour section droite un segment de parabole* PSQ, *où* S *est le sommet de la parabole et* PQ *la corde* (*limite du segment*) *perpendiculaire à l'axe à une distance donnée* d *du sommet* S; *cette distance* d *est supposée égale à quatre fois la distance du sommet* S *au foyer* F *de la parabole.*

On demande de déterminer, dans le solide (C), *un plan* π *tel que, si l'on place* (C) *dans un liquide pesant,*



homogène, de densité 8, *supposé en équilibre, de façon que* π *soit le plan d'affleurement de* (C), *le solide* (C) *reste en équilibre.* (Octobre 1912.)

Un point matériel pesant A, *de masse* M, *est fixé sur la*

surface d'une sphère pesante, pleine et homogène, de même masse M. *Soient* O *le centre de la sphère et* R *son rayon.*

Après avoir imprimé à la sphère une rotation ω_0 *autour de* OA, *on pose la sphère sur un plan horizontal* Π, *et en même temps on imprime au centre de masses du système une vitesse* V_0 *parallèle au plan* Π.

On demande :

1° *D'étudier le mouvement du système ;*

2° *D'évaluer la pression de la sphère sur le plan* Π ;

3° *De déterminer, quand* $V_0 = 0$, *le lieu du point de contact de la sphère et du plan.*

On néglige le frottement. (Juin 1913.)

Un solide homogène pesant, ayant un point fixe O, *est de révolution autour de la droite qui joint* O *à son centre de gravité* G. *A l'instant initial le point* G *est situé au-dessus du plan horizontal passant par* O.

Soit $OG = l$; *fixons* $+ Oz$ *suivant* OG *et* $O\zeta$ *suivant la zénithale de* O.

Si $Oxyz$ *est un trièdre trirectangle fixé au solide et* $O\xi\eta\zeta$ *un trièdre trirectangle (de même disposition) fixé au repère, la position du solide dans le repère est déterminée par les trois angles d'Euler* ψ, θ, φ *relatifs au point* O.

Soient $A = B$ *et* C *les moments principaux d'inertie du solide relatifs au point fixe* O, *et* p, q, r *les composantes suivant* Ox, Oy, Oz *de la vitesse angulaire de rotation du corps dans son mouvement autour de* O.

Supposons que, à l'instant initial, les valeurs ψ_0, θ_0, φ_0 *et* ψ'_0, θ'_0, φ'_0 *des angles d'Euler et de leurs dérivées* $\frac{d\psi}{dt}$, $\frac{d\theta}{dt}$, $\frac{d\varphi}{dt}$ *soient*

$$\psi_0 = 0, \qquad \theta_0 = \frac{\pi}{3}, \qquad \varphi_0 = 0,$$

$$\psi'_0 = \frac{2Cn}{3A}, \qquad \theta'_0 = 0, \qquad \varphi'_0 = n - \frac{Cn}{3A},$$

où n *(qui est la valeur initiale de* r*) n'est pas nulle.*

Soient enfin M *la masse du solide et* Mg *son poids, et soit*

$$3MglA = 2C^2n^2.$$

On demande de décrire le mouvement de l'axe Oz *du solide dans le repère, et le mouvement du solide autour de son axe* Oz.

Si, sur $+$ Oz, *on fixe un point* μ *à l'unité de distance de* O, *et qu'on désigne par* P *le pied de la perpendiculaire abaissée de* μ *sur le plan horizontal* O$\xi\eta$, *on demande, en particulier, quelle est la forme de la courbe décrite par* P *quand* t *varie ?* (Octobre 1913.)

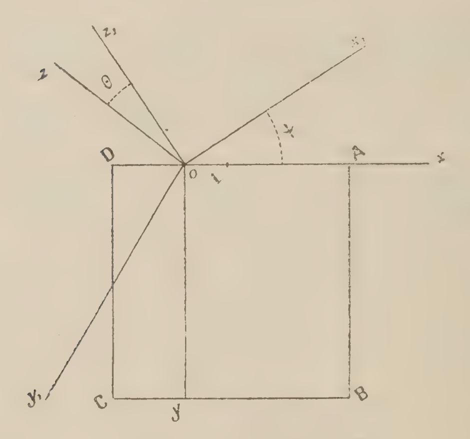
Paris.

Composition. — *On considère une plaque carrée homogène pesante, infiniment mince* ABCD, *de masse* M *et de côté*

$$AB = BC = 2a.$$

Cette plaque est assujettie aux liaisons suivantes :

1° *Un point* O *du côté* DA *est fixe ;*



2° *Ce côté* DA *glisse sans frottement sur un plan horizontal fixe* x_1Oy_1.

Trouver le mouvement de la plaque en supposant d'abord les conditions initiales quelconques.

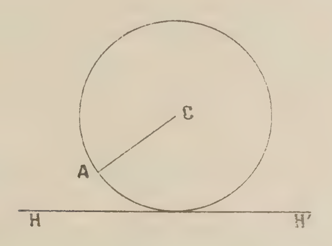
Notation. — *On appellera* l *la distance* OL *du point fixe* O *au milieu* L *du côté* AD.

En prenant pour axes liés à la plaque l'axe Ox *confondu avec le côté* OLA, *l'axe* Oy *parallèle à* AB, *l'axe* Oz *normal à la plaque, on appellera* ψ *l'angle* x_1Ox *compté autour de la verticale ascendante* Oz_1 *et* θ *l'angle* z_1Oz *compté autour de* Ox.

Cas particulier. — *En supposant qu'à l'instant initial la plaque parte du repos dans la position horizontale* ($\theta = 0$), *établir la relation qui lie* ψ *et* θ. *Calculer l'angle dont tourne le côté* DOA *dans le temps que met la plaque à passer de la position horizontale à la position verticale.*

Peut-il arriver que, la plaque étant placée dans ces conditions initiales particulières, le côté DOA *reste immobile.*

Épreuve pratique. — *Un cylindre droit à base circulaire homogène et pesant, de rayon* R *et de masse* M *est assu-*



jetti à rouler *sans glisser sur un plan horizontal fixe* HH'. *En un point* A *de la circonférence de la section droite passant par le centre de gravité* C *du cylindre est fixé au cylindre un point matériel pesant de masse* m. (*La figure représente cette section droite.*)

1° *Indiquer la position d'équilibre stable du cylindre.*

2° *Le cylindre étant écarté infiniment peu de cette position d'équilibre et abandonné sans vitesse, calculer en secondes la durée* T *d'une double oscillation infiniment petite.*

3° *Application numérique :*

$$R = 1^{m},$$
$$M = 2000^{g},$$
$$m = 20^{g}.$$

On prendra, dans le système C.G.S., $g = 980$.

(Juin 1913.)

Composition. — *Une barre homogène* AB, *non pesante, se déplace dans l'espace de telle sorte que l'extrémité* A *glisse sans frottement sur la droite dont les équations sont*

$$y = 0, \qquad z = h$$

et que l'extrémité B *glisse sans frottement sur le plan dont l'équation est* $z = -h$.

On désignera par $2l$ *la longueur de la barre et par* α *l'angle donné par la formule* $\sin\alpha = \frac{h}{l}$; *par* x *et* y *les coordonnées du centre de gravité de la barre.*

On suppose que tous les éléments de la barre sont attirés par le point O *proportionnellement à la distance; on désignera par* ω^2 *l'attraction de l'unité de masse placée à l'unité de distance.*

On demande : 1° *d'étudier le mouvement de la barre et de discuter la trajectoire du centre de gravité;* 2° *de calculer les réactions en* A *et* B; 3° *d'examiner le cas où*

$$y'_0 = \omega\sqrt{l^2\cos^2\alpha - y_0^2},$$

y_0 *et* y'_0 *étant les valeurs initiales de* y *et* $\frac{dy}{dt}$.

Épreuve pratique. — *Un volume homogène est formé par un cône de révolution de rayon* R *et de hauteur* h *et par une demi-sphère extérieure au cône et ayant pour grand cercle le cercle de base du cône. On demande :*

1° *La position du centre de gravité du volume;*

2° *Le rayon de gyration du corps par rapport à son axe de symétrie et par rapport à un axe perpendiculaire mené par le sommet du cône;*

3° *La longueur du pendule simple isochrone au pendule composé formé par le corps quand l'axe de rotation passe par le sommet du cône et est perpendiculaire à l'axe de symétrie.*

Application numérique : $h = 80$, $\mathrm{R} = 12$.

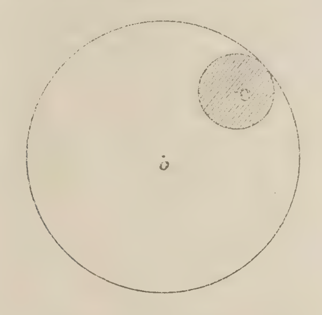
(Octobre 1913.)

Rennes.

Épreuve écrite. — I. *Théorèmes généraux de la Dynamique relatifs au centre de gravité.*

II. *Mouvement d'un cerceau appuyé sur une cheville cylindrique.*

La cheville a la forme d'un cylindre de révolution dont



l'axe est horizontal. Le cerceau se réduit à une circonférence matérielle pesante et homogène qui reste constamment dans le plan d'une section droite de la cheville et roule sans glisser sur la circonférence de cette section droite.

ÉPREUVE PRATIQUE. — *Un fil flexible et inextensible s'applique sur la demi-circonférence supérieure de la section droite d'un cylindre de révolution à génératrices horizontales. Le coefficient de frottement du fil sur le cylindre est égal à* $\frac{1}{2}$. *Les extrémités libres du fil pendent verticalement; l'une d'elles,* A, *supporte une charge de* 1^{kg}. *Entre quelles limites devra varier la charge de l'autre,* B, *pour que l'équilibre subsiste?* (Novembre 1913.)

COMPOSITION ÉCRITE. — I. *Étude générale du mouvement d'un corps solide assujetti à tourner autour d'un axe fixe.*

II. *On considère le système formé par une barre horizontale homogène* OA *et un disque circulaire* (D) *de centre* A, *dont le plan est perpendiculaire à la barre. La barre* OA *peut tourner sans frottement autour de la verticale du point fixe* O, *tandis que le disque* (D) *roule sans frottement sur un plan horizontal. Le centre de gravité* G *du disque ne coïncide pas avec le centre de figure* A. *On demande d'étudier le mouvement que prend le système sous l'action de la pesanteur.*

ÉPREUVE PRATIQUE. — *Un corps solide pesant est muni de deux axes de suspension parallèles dont la distance est égale à a. En faisant osciller ce corps successivement autour des deux axes, on trouve, pour les longueurs des pendules simples synchrones correspondants, respectivement l et l'. Sachant que le centre de gravité du corps est situé entre les deux axes, on demande de calculer :*

1° *La distance x du premier axe au centre de gravité;*

2° *Le rayon de gyration k du corps autour d'un axe parallèle aux axes de suspension et passant par le centre de gravité.*

Cas d'impossibilité ou d'indétermination.

Application numérique :

$$a = 1^{m},75, \qquad l = 1^{m},25, \qquad l' = 1^{m},50.$$

(Juin 1914.)

ANCIENNES QUESTIONS NON RÉSOLUES.

423 (**1858**, 37) (¹). — On a mesuré les trois côtés a, b, c d'un triangle rectiligne ABC; α, β, γ sont les erreurs *absolues* respectives qu'on peut commettre sur la mesure des trois côtés a, b, c. Évaluer l'influence de ces erreurs sur les angles A, B, C.

424 (**1858**, 33). — Même question pour le triangle sphérique.

CAILLET.

554 (**1860**, 464). — On a fait arriver dans un poids d'eau x un poids p de vapeur d'eau à d degrés sous la pression de c centimètres; on a ainsi porté la température t de cette eau à la température t'; l'eau est renfermée dans un vase métallique pesant k kilogrammes et dont la chaleur spécifique est m; on demande la valeur de x.

(¹) La question 423 a été résolue (**1859**, 277). On n'en reproduit l'énoncé que pour rendre compréhensible celui de la question 424.

592 (**1861**, 216). — Soit un cylindre circonscrit à une surface *de révolution;* de chaque point de la ligne de contact on abaisse des perpendiculaires sur l'axe; on obtient une surface gauche; circonscrivons à cette surface un second cylindre; coupant les deux cylindres par un plan, la section du second cylindre est la développée de la section du premier cylindre.

M. DUNESME.

593 (**1861**, 216). — Un cylindre étant circonscrit à une surface de révolution engendrée par une sinusoïde, la courbe de contact est une hélice dont la projection sur un méridien est aussi une sinusoïde semblable à la courbe méridienne; le rapport de similitude est $\frac{1}{2}$; la section du cylindre par un plan est une cycloïde; opérant comme dans la question précédente, la courbe de contact sur la surface gauche est encore une hélice égale à la première hélice. M. DUNESME.

598 (**1861**, 399). — Pour quelle longitude du Soleil le temps que son disque met à traverser le méridien est-il un maximum ou un minimum?

604 (**1862**, 29). — Soient donnés un point ayant pour coordonnées $\frac{\alpha}{\delta}$, $\frac{\beta}{\delta}$, $\frac{\gamma}{\delta}$, axes quelconques x, y, z et trois plans

$$\frac{Ax}{u} + \frac{By}{u} + \frac{Cz}{u} + D = 0,$$
$$\frac{A'x}{u} + \frac{B'y}{u} + \frac{C'z}{u} + D' = 0,$$
$$\frac{A''x}{u} + \frac{B''y}{u} + \frac{C''z}{u} + D'' = 0;$$

δ et u sont des quantités quelconques. Menant par le point trois plans respectivement parallèles aux trois plans, on forme un parallélépipède dont on demande de trouver les arêtes en fonction de $\frac{\alpha}{\delta}$, $\frac{\beta}{\delta}$, $\frac{\gamma}{\delta}$ et u.

617 (**1862**, 156). — *Théorème.* — Soient $w = u + iv$ une fonction monodrome ou monogène; une courbe fermée

$$f(x, y) = 0$$

dans le plan horizontal des indices de z; un cylindre vertical qui a $f(x, y) = 0$ pour base; deux plans verticaux P et P′ rectangulaires.

Supposons que w ne devienne ni nulle ni infinie dans l'intérieur de $f(x, y) = 0$ et que l'indice de z parcoure $f(x, y)$. Sur chaque génératrice (x, y) du cylindre portons, à partir de la base, les longueurs u et v correspondantes; nous obtiendrons ainsi deux courbes U et V.

L'aire de la projection de U ou de V sur le plan P est égale à l'aire de la projection de V ou de U sur P′.

DEWULF.

643 (**1863**, 93). — Théorème concernant les surfaces d'un ordre quelconque (à démontrer par des considérations de pure géométrie).

Parmi les surfaces de degré n qui forment un faisceau donné, il y a en général [1]

$$m[(m+2n-3)^2-(n-1)(n+2m-3)]$$

qui touchent une surface donnée du degré m.

Par exemple, dans un faisceau de surfaces du degré n, il y en a $3(n-1)^2$ qui touchent un plan donné.

E. DE JONQUIÈRES.

693 (**1864**, 139). — Trouver l'équation des courbes parallèles aux ovales de Descartes. STREBOR.

ERRATA.

1916, page 401, lignes 1-4 en remontant, et page 402, lignes 1-4, dans les seconds membres, *au lieu de :*

$$X_1, \quad X_2, \quad \ldots, \quad X_{n-1}, \quad X_n,$$

lire :

$$X_1^2, \quad X_2^2, \quad \ldots, \quad X_{n-1}^2, \quad X_n^2.$$

1916, page 406, ligne 15, *au lieu de* trois et quatre, *lire* deux et trois.

1916, page 439, ligne 15, *au lieu de* $v + uz$, *lire* $v + \mu z$.

TABLE DES MATIÈRES PAR ORDRE MÉTHODIQUE.

(TOME XVI, 4e SÉRIE, 1916.)

La classification adoptée est celle de l'Index du *Répertoire bibliographique des Sciences mathématiques.*

Analyse mathématique.

Géométrie.

Mathématiques appliquées.

Certificats d'études supérieures des Facultés des Sciences.

Questions de concours et d'examens.

Correspondance.

Nécrologie.

Divers.

Anciennes questions non résolues.

Questions proposées.

Solutions de questions proposées.

TABLE ALPHABÉTIQUE DES AUTEURS.

(TOME XVI, 4e SÉRIE, 1916.)

PARIS. — IMPRIMERIE GAUTHIER-VILLARS ET Cie,

56489 Quai des Grands-Augustins, 55.

NOUVELLES ANNALES
DE
MATHÉMATIQUES

JOURNAL DES CANDIDATS

AUX ÉCOLES SPÉCIALES, A LA LICENCE ET A L'AGRÉGATION,

DIRIGÉ PAR

C.-A. LAISANT,
Docteur ès Sciences,
Ancien Examinateur d'admission à l'École Polytechnique.

R. BRICARD,
Ingénieur des Manufactures de l'État,
Professeur au Conservatoire des Arts et Métiers
Répétiteur à l'École Polytechnique.

PUBLICATION FONDÉE EN 1842 PAR GERONO ET TERQUEM.

QUATRIÈME SÉRIE. — TOME XVI.
(75e VOLUME DE LA COLLECTION.)

DÉCEMBRE 1916.

S'adresser, pour la rédaction :
à M. C.-A. LAISANT, 5, rue du Conseil, Asnières (Seine),
ou à M. R. BRICARD, 108, rue Denfert-Rochereau, Paris, 14e.

PARIS,
GAUTHIER-VILLARS ET Cie, ÉDITEURS,
LIBRAIRES DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,
Quai des Grands-Augustins, 55.

1916

Les manuscrits non insérés ne sont pas rendus.

(Ce Recueil paraît chaque mois.)

Rédacteur de service : M. C.-A. Laisant.

Liste des Correspondants des NOUVELLES ANNALES
dans les villes où siègent les Facultés des Sciences.

Alger : M. S. Carrus. — Besançon : M. H. Padé. — Bordeaux : M. Ét. Delassus. — Caen : M. Ch. Riquier. — Clermont-Ferrand : M. J. Haag. — Dijon : M. R. Baire. — Grenoble : M. J. Collet. — Lille : M. A. Boulanger. — Lyon : M. R. Le Vavasseur. — Marseille : M. L. Sauvage. — Montpellier : M. E. Fabry. — Nancy : M. H. Vogt. — Paris : M. H. Lebesgue. — Poitiers : M. P. Boutroux. — Rennes : M. J. Le Roux. — Toulouse : M. E. Cosserat.

Prix d'abonnement pour un an (12 *numéros*)

Paris................ 15 fr. | Départements et Union postale.. 17 fr.

AVIS DIVERS

Reçu solutions aux questions : 2294, 2295, 2298, 2300, 2304.

AVIS IMPORTANT.

Tout Auteur d'un Mémoire inséré aux *Nouvelles Annales de Mathématiques* a droit à un tirage à part gratuit de 25 exemplaires.

Cette mesure n'est pas applicable aux *Articles bibliographiques*, à ceux qui figurent sous la rubrique *Correspondance*, aux *Énoncés* ni aux *Solutions de questions proposées*.

Mais la lecture des Mémoires originaux devient chaque jour plus difficile pour celui qui connaît seulement de la Théorie des fonctions les parties regardées actuellement comme classiques; il m'a dès lors semblé qu'on pouvait chercher à faire œuvre utile en tentant d'exposer, d'une manière élémentaire, certaines recherches qui, bien que relativement récentes, prennent chaque jour une importance plus considérable. De ce nombre est la théorie des ensembles : c'est à elle qu'est consacré cet Ouvrage. J'ai tenu cependant à lui donner le titre de *Leçons sur la Théorie des fonctions*, car, en parlant des ensembles, j'ai cherché à ne jamais perdre de vue les applications.

Ce n'est pas que je méconnaisse le très haut intérêt que présente par elle-même la théorie des ensembles; mais il m'a paru qu'il y avait lieu de distinguer nettement cet intérêt philosophique de l'utilité pratique de la théorie, c'est-à-dire de son lien avec d'autres parties des Mathématiques. Aussi ai-je laissé de côté bien des résultats intéressants obtenus par divers géomètres au sujet des ensembles, parce que je n'aurais pu en donner d'applications ici même.

Les trois premiers Chapitres sont un exposé des éléments de la Théorie des ensembles; j'ai cherché à les rendre aussi accessibles que possible, en supposant chez le lecteur un minimum de connaissances.

Les trois derniers Chapitres contiennent des applications à la Théorie des fonctions : j'ai, cette fois, supposé connus certains résultats qui sont établis dans l'un quelconque des Ouvrages cités il y a un instant et semblent, par suite, pouvoir être regardés comme classiques.

Je n'ai d'ailleurs pas cherché à remplacer la lecture des Mémoires originaux, mais seulement à la faciliter; aussi ai-je laissé des lacunes qu'il aurait été aisé de combler en transcrivant presque textuellement un certain nombre de pages de tel ou tel Mémoire : il y a toujours avantage, pour le lecteur qui désire approfondir une question, à recourir lui-même au Mémoire original.

Des Notes sont consacrées à quelques questions qui se rapportent aux principes de la théorie des ensembles et dont la discussion aurait alourdi inutilement les premiers Chapitres.

Préface de la 2e édition.

Je me suis demandé s'il convenait de remanier cette nouvelle édition; mais je me suis rapidement aperçu que je serais conduit à reprendre des matières traitées dans d'autres Ouvrages de la Collection; il m'a donc paru préférable de conserver à ce Livre le caractère élémentaire qui en fait une sorte d'introduction à plusieurs de ces Ouvrages; le texte des six Chapitres et des trois Notes a donc été reproduit sans modification. J'ai, par contre, ajouté trois nouvelles Notes qui doublent presque les dimensions du livre et au sujet desquelles il me paraît utile de donner quelques explications.

Dans la Note IV, j'ai réuni divers articles relatifs aux discussions sur les principes de la théorie des ensembles; je remercie MM. Baire, Hadamard et Lebesgue de m'avoir autorisé à reproduire la correspondance que nous avons échangée en 1904 et qui a été publiée dans le *Bulletin de la Société mathématique*. La comparaison entre la Note IV et les pages qui la précèdent montre que ma pensée a évolué sur plusieurs points; il m'a semblé que je ne devais pas dissimuler cette évolution, d'autant que j'ai parfois constaté chez ceux qui étudient pour la première fois la théorie des

ensembles une évolution analogue dans l'interprétation des principes; il y a là des questions assez complexes pour qu'il ne soit pas inutile d'en mettre successivement en évidence divers aspects un peu différents. Ces discussions sont d'ailleurs peut-être plus intéressantes pour les philosophes que pour les mathématiciens; j'espère que les philosophes qui s'intéressent aux principes et qui veulent bien citer parfois ce Livre, me sauront gré d'avoir réuni des articles dispersés dans de nombreux Recueils et d'y avoir joint une exposition inédite de la « démonstration » de M. Zermelo qui a joué un rôle dans beaucoup de ces controverses.

La Note V est consacrée aux probabilités dénombrables, qui se rattachent étroitement à plusieurs des questions étudiées précédemment, notamment à la nature arithmétique des incommensurables et à la théorie de la mesure.

Dans la Note VI enfin, j'ai essayé de développer la théorie de la mesure et de l'intégration en restant au point de vue que j'avais adopté pour définir les ensembles mesurables. On sait quelle extension M. Lebesgue a donnée à ma définition et quelle riche moisson de résultats il en a tiré; quelques-uns de ces résultats ont été exposés par lui-même dans deux livres de cette Collection : *Leçons sur l'intégrale définie* et *Leçons sur les séries trigonométriques*. Il m'a semblé qu'il n'était peut-être pas inutile de faire voir comment les définitions constructives dont j'étais parti conduisent par une voie élémentaire et très simple à des résultats pratiquement aussi généraux, tant pour l'intégration que pour la mesure. Je serais heureux si cette Note VI pouvait être, pour beaucoup de lecteurs, une introduction à l'étude des belles recherches de M. Lebesgue, dont l'importance capitale est chaque jour mieux comprise et dont les conséquences sont loin d'être épuisées.

Table des Matières.

la théorie des ensembles. La Philosophie mathématique et l'infini. L'infini mathématique et la réalité. — V. *Les probabilités dénombrables et leurs applications arithmétiques*. Les probabilités dénombrables. Les fonctions décimales. Les fonctions continues. Sur un problème de probabilités relatives aux fonctions continues. — VI. *La théorie de la mesure et la théorie de l'intégration*. Remarques historiques. Nombres calculables. Les fonctions calculables et les fonctions à définition asymptotique. Les ensembles mesurables. — CHAP. I. *La théorie de la mesure*. Le premier théorème fondamental. La mesure des ensembles bien définis. Le second théorème fondamental. Les ensembles à points multiples. Les ensembles de mesure nulle. CHAP. II. *La définition de l'intégrale*. La définition des fonctions bornées et le troisième théorème fondamental. La définition de l'intégrale et des fonctions bornées. Les propriétés de l'intégrale des fonctions bornées. L'intégration des fonctions non bornées. Comparaison avec l'intégrale de M. Lebesgue. — CHAP. III. *Le calcul effectif des intégrales*. Le calcul par la définition. L'emploi des probabilités dénombrables.

55349 Paris. — Imprimerie Gauthier-Villars et Cie, 55, quai des Grands-Augustins.

SOMMAIRE DU NUMÉRO DE DÉCEMBRE 1916.

Voir AVIS DIVERS, page 2 de la Couverture.

56489 Paris. - Imp. GAUTHIER-VILLARS et Cie, quai des Grands-Augustins, 55

Le Gérant : GAUTHIER-VILLARS.


UNIVERSITY OF ILLINOIS-URBANA
510.5NO C001
NOUVELLES ANNALES DE MATHEMATIQUES
75 1916
3 0112 016828409